Pfeile als mentales Werkzeug

Eine empirische Untersuchung zu Vektoren im
Physikunterricht der Mittelstufe

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium
(Dr. rer. nat.)
im Fach Physik

eingereicht an der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen
Fakultät I
der Humboldt-Universität zu Berlin

von
Herrn Dipl.-Phys. Franz Karl Joachim Boczianowski
geboren am 17.05.1975 in Hannover

Präsident der Humboldt-Universität zu Berlin:
Prof. Dr. Dr. h.c. Christoph Markschies

Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen
Fakultät I:
Prof. Dr. Lutz-Helmut Schön

Gutachter:

1. Prof. Dr. Lutz-Helmut Schön
2. Prof. Dr. Rita Wodzinski
3. Prof. Dr. Helmut Fischler

eingereicht am: 6. November 2009
Tag der mündlichen Prüfung: 26. April 2010

Abstract

Arrows can be used in an adequate way to carry out vector calculations in different subject areas of physics and mathematics education. Such vector arrows can be understood as a symbol system with which situations and problems can be modelled mathematically. If the knowledge about the usage of arrows is not attached to specific contents and contexts, additional options arise in new and unknown situations. In this case vector arrows act as so called mental tools. It was the aim of the implemented study to verify such a transfer of knowledge in mechanics education of middle school.

The study was designed as a quasi-experimental field study with three treatment groups and one baseline group. The treatments consists of four lessons in which the concept of vector arrows was taught with one, two or without an embodiment of the arrows by physical quantity. An increased number of embodiments emphasizes the independence of contents and the flexibility of the arrows. Thus, arrows become a mental tool. In line with the hypothesis one scale of the post-test shows that the teaching, which involves multiple embodiments of arrows, leads to higher performance related to unknown embodiments.However, it becomes clear, that other factors play a role in the usage of arrows as mental tools.

Zusammenfassung

Mit Pfeilen lassen sich auf angemessene Weise im Physik- und Mathematikunterricht in verschiedenen Themenbereichen vektorielle Betrachtungen umsetzen. Solche Vektorpfeile stellen ein Symbolsystem dar, mit dem sich Situationen mathematisieren und Probleme modellieren lassen. Ist das Wissen um die Handhabung der Vektorpfeile nicht an spezielle Inhalte und Kontexte gebunden, eröffnen sich für den Agierenden auch in unbekannten, neuen Situationen erweiterte Handlungsoptionen. Vektorpfeile funktionieren dann als sogenannte mentale Werkzeuge. Es war das Ziel der im Mechanikunterricht der Mittelstufe umgesetzten Studie, einen entsprechenden Transfer von Wissen sichtbar zu machen.

Die Studie ist als quasiexperimentelle Feldstudie mit drei Treatmentgruppen und einer Baselinegruppe angelegt worden. Die Treatments umfassen mehrstündige Lerneinheiten, in denen das Konzept der Vektorpfeile mit ein, zwei beziehungsweise ohne physikalische Anwendungen der Pfeile gelehrt wurde. Eine erhöhte Anzahl an Anwendungen betont die Inhaltsunabhängigkeit und Flexibilität der Pfeile und vermittelt sie im Sinne eines mentalen Werkzeugs. Hypothesenkonform wird bezüglich einer Skala des Nachtests sichtbar, dass der Unterricht, der mehrere Anwendungen umfasst, zu höheren Leistungen der Probanden bei ihnen unbekannten Anwendungen führt. Außerdem zeigt eine explorative Analyse, dass schwache Probanden besonders vom anwendungsreichen Unterricht profitieren. Es wird jedoch insgesamt deutlich, dass für die Nutzung der Vektorpfeile als mentales Werkzeug weitere Einflussfaktoren eine Rolle spielen.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Mentale Werkzeuge – eine Definition **5**
2.1 Symbole als mentale Werkzeuge 6
2.2 Zusammenfassung 12

3 Pfeile – Erscheinungsformen und Verwendung **15**
3.1 Pfeile und Vektoren 15
3.2 Verwendung von Vektorpfeilen 19
3.2.1 Vektorpfeile in der Mechanik 19
3.2.2 Vektorpfeile außerhalb der Mechanik 27

4 Empirische Grundlagen **31**
4.1 Pfeile und Vektoren aus Sicht der Physikdidaktik 31
4.1.1 Zur Mechanik in der Schule 31
4.1.2 Zur Mechanik in der Universität 38
4.1.3 Zusammenfassung 40
4.2 Pfeile und Vektoren aus Sicht der Mathematikdidaktik 41
4.2.1 Einführungen in die Vektorrechnung 41
4.2.2 Wahrnehmung von Pfeilen in der Vektorrechnung . . . 44
4.2.3 Anwendungsorientierte Einführung 45
4.2.4 Zusammenfassung 47
4.3 Empirische Untersuchungen zu mentalen Werkzeugen 48
4.3.1 Mathematische Graphen als mentale Werkzeuge 48
4.3.2 Pfeile als mentale Werkzeuge 52
4.3.3 Zusammenfassung 53
4.4 Zusammenfassung und Konsequenzen 54

5 Forschungsfrage und Hypothesen **57**
5.1 Forschungsfrage 57
5.2 Eingrenzung der Untersuchung 58

5.2.1 Wahl der Pfeilanwendungen 59
5.2.2 Gestaltung der Lerneinheit 60
5.3 Hypothesen 61
5.3.1 Allgemeiner Leistungszuwachs 61
5.3.2 Abstrakt-mathematische Leistung 61
5.3.3 Nahtransfer 62
5.3.4 Ferntransfer 63

6 Methoden 65
6.1 Wahl des Untersuchungsverfahres 65
6.2 Gestaltung der Untersuchung 67
6.3 Auswerteverfahren 69
6.3.1 Gruppenvergleiche 69
6.3.2 Zusammenfassung & statistische Hypothesen 73

7 Treatments 77
7.1 Treatment T1 mit einer Pfeilanwendung 78
7.2 Treatment T2 mit zwei Pfeilanwendungen 80
7.3 Treatment T0 ohne Pfeilanwendungen 83

8 Tests 87
8.1 Vortest 87
8.2 Nachtest 89

9 Durchführung und erste Eindrücke 93
9.1 Gruppenzusammensetzung, Ablauf & Lernbiografien 93
9.2 Subjektive Eindrücke 95

10 Ergebnisse 99
10.1 Ergebnisse des Vortests 99
10.1.1 Punktwerteverteilung 99
10.1.2 Varianzanalyse 100
10.2 Ergebnisse des Nachtests 102
10.2.1 Punktwerteverteilungen 102
10.2.2 Varianzanalyse 105
10.2.3 Validierung der Hypothesen 106
10.3 Diskussion 112
10.3.1 Resümee 112
10.3.2 Diskussion und Kritik 113

11 Exploration **117**
11.1 Punktwerteverteiltung . . . 118
11.2 Begutachtung der Hypothesen . . . 122
11.3 Zusammenfassung . . . 128

12 Schluss **131**
12.1 Zusammenfassung . . . 131
12.2 Konsequenzen . . . 133

A Statistische Verfahren **135**
A.1 Signifikante Unterschiede . . . 135
A.2 Varianzanalyse . . . 137
A.3 Kontraste . . . 139
A.4 Normalverteilung . . . 141

B Unterricht **143**

C Tests **147**
C.1 Vortest . . . 147
C.2 Nachtest . . . 156

D Ergebnistabellen **177**
D.1 Hypothesenprüfende Untersuchung . . . 177
D.1.1 Punktwerteverteilungen im Vortest . . . 177
D.1.2 Normalverteilungen im Vortest . . . 179
D.1.3 Mittelwertvergleiche im Vortest . . . 182
D.1.4 Punktwerteverteilungen im Nachtest . . . 184
D.1.5 Normalverteilung im Nachtest . . . 186
D.1.6 Mittelwertvergleiche im Nachtest . . . 194
D.2 Exploration . . . 199
D.2.1 Mittelwertvergleiche im Vortest . . . 199
D.2.2 Punktwerteverteilungen im Nachtest . . . 201
D.2.3 Normalverteilung im Nachtest . . . 204
D.2.4 Mittelwertvergleiche im Nachtest . . . 212
D.2.5 Baselinegruppen-Vergleich im Nachtest . . . 220
D.2.6 Post-hoc-Test im Nachtest . . . 222

E Abkürzungen **223**

Danksagung **225**

Literaturverzeichnis **227**

Abbildungsverzeichnis **239**

Tabellenverzeichnis **243**

Kapitel 1

Einleitung

> „Sie werden Ihre ganze Kraft zusammennehmen müssen – nicht weil es schwierig zu verstehen wäre, sondern weil es absolut lächerlich ist: Wir werden nämlich nichts weiter machen als kleine Pfeile auf ein Blatt Papier zeichnen – weiter nichts!“

Richard P. Feynman, Prof. für theoretische Physik und Nobelpreisträger von 1965, versucht in seinem Buch „QED – Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie“[1] das scheinbar Unmögliche: Einem breiten Publikum möchte er die Quantenelektrodynamik (QED) verständlich machen. Dabei geht es ihm nicht um eine oberflächliche, gleichnishafte Beschreibung der neuesten Forschungsergebnisse, sondern um einen verständnisschaffenden Einblick in die Denkweisen der Forschenden und in die von ihnen geschaffenen Strukturierungen. Zur Darstellung der mathematischen Berechnungen und Modelle benutzt Feynman Pfeile und es zeigt sich im Gang seines Buches, dass sich mit den lächerlich einfachen Pfeilen alltägliche optische Erscheinungen sowie die seltsam anmutenden Quanteneffekte durchgängig und einheitlich beschreiben lassen. Von bekannten und gewohnten Anschauungen, davor warnt Feynman im obigen Zitat, werden die Leserinnen und Leser dabei jedoch Abschied nehmen müssen.

Neben dem extremen Beispiel der Beschreibung der Quantenelektrodynamik mithilfe von Pfeilen existieren, teilweise schon vor der Publikation Feynmans, Vorschläge aus der Didaktik der Physik, gerichtete also vektorielle Größen mit Pfeilen darzustellen. Die frühen wie auch aktuellen Forschungsarbeiten zeigen, dass es gelingen kann, den Schülerinnen und Schüler Inhalte der Mechanik, Optik und Quantenmechanik zu vermitteln. Mit gezeichneten Pfeilen ist es möglich, auf eine für Schülerinnen und Schüler einsichtige Weise eine Formalisierung und Mathematisierung physikalischer Gesetzmäßigkeiten

[1] 11. deutsche Ausgabe: Feynman (2005), engl. Erstausgabe: Feynman (1985)

umzusetzen. Das bedeutet, dass sich mit Pfeilen nicht nur physikalische Situationen visualisieren, sondern vielmehr modellieren lassen, die Pfeile also Zusammenhänge beschreibbar und Voraussagen möglich machen.

Die aktuelle Notwendigkeit einer Veränderung und Betonung der Modellbildung im Unterricht belegt die PISA-Studie 2003.[2] So haben Schülerinnen und Schüler in Deutschland bei Aufgaben Schwierigkeiten, in denen zu analysieren und zu modellieren ist (Prenzel et al., 2004, S. 14 ff.). Insbesondere konnte gezeigt werden, dass die Versuchspersonen ihr kognitives Potenzial, das sie schulfachunabhängig unter Beweis gestellt hatten, in der Mathematik und den Naturwissenschaften nicht ausschöpften. Eine dahingehende Verbesserung des Schulunterrichts wird vom PISA-Konsortium als bedeutende Herausforderung aufgeführt.

Zu diesem Befund passt die jahrzehntelange, internationale Forderung verschiedener Forschergruppen der Physikdidaktik (siehe Kapitel 4.1), im Mechanikunterricht von einer ausschließlich eindimensionalen und auf Quantitäten fokusierten Betrachtung von Bewegungen abzusehen und dafür eine mehrdimensionale Betrachtung mithilfe von gezeichneten Pfeilen ins Zentrum zu stellen. Es spricht vieles dafür, dass auf diese Weise grundlegende Konzepte für die Schülerinnen und Schüler überhaupt erst sichtbar werden, während sie in Gestalt von Formeln verborgen bleiben. Zwar ist für die exakte Berechnung von Zahlenwerten ein arithmetischer und auf Schulebene dafür eindimensionaler Formelformalismus unumgänglich, jedoch darf sich der Physikunterricht nicht auf das Berechnen von erfragten Größen beschränken. Für das Verstehen von physikalischen Prinzipien und Zusammenhängen, die im Zentrum stehen sollten, ist es für den Lernenden wichtig, über eine angemessen komplexe und gleichzeitig handhabbare Darstellungsform zu verfügen. Diese muss flexibel und abstrakt sein, um mit ihr in vielen verschiedenen Kontexten und Inhalten agieren und handeln zu können. Die dabei verwendeten Symbole werden zum vielseitigen, mentalen Werkzeug, mit dem sich Probleme bearbeiten und lösen lassen. Mit gezeichneten Pfeilen ist es in vielerlei Hinsicht möglich, vektorielle Betrachungen auf einem schulgerechten Niveau vorzunehmen. Es finden sich verschiedene Anhaltspunkte dafür, dass sich Pfeile als flexibles, themen- und jahrgangsübergreifendes Werkzeug verwenden lassen. Es ist das Anliegen der vorliegenden Arbeit, das Potenzial von Pfeilen detailliert aufzuzeigen, diese eingehend im Hinblick auf den Physikunterricht zu diskutieren und mit einer Feldstudie Pfeile als mentales Werkzeug empirisch nachzuweisen.

Im Anschluss an diese Einleitung werden im Kapitel 2 mentale Werk-

[2]Der Fokus von PISA (Programme for International Student Assessment) lag 2003 auf der mathematischen Kompetenz und dem fächerübergreifenden Problemlösen.

zeuge erst allgemein und anschließend mit Bezug auf das Pfeilsymbol aus lernpsychologischer Perspektive eingeführt und definitiert. Die verschiedenen Formen und Nutzungsweisen von Pfeilen und die damit verbundenen Möglichkeiten und Grenzen werden im Kapitel 3 vorgestellt. Dies geschieht zum einen fächerübergreifend und zum anderen mit dem Blick auf die verschiedenen Facetten der Vektorpfeile in der Physik. Im Kapitel 4 werden die empirischen Grundlagen aus drei verschiedenen Fachrichtungen zusammengestellt. Es existieren umfangreiche Forschungsarbeiten zu Pfeilen und Vektoren aus der Physik- und Mathematikdidaktik, die zwar aus unterschiedlicher Motivation resultieren, bezüglich ihrer Ziele jedoch dicht beieinander liegen. Am Ende des Kapitels werden empirische Arbeiten aus der Lernpyschologie vorgestellt, die sich mit mathematischen Graphen als mentalen Werkzeugen befassen. Resultierend aus den verschiedenen Arbeiten werden im Kapitel 5 die Forschungsfrage formuliert und nach einer Eingrenzung des Untersuchungsbereichs auf das Thema der Mechanik in der Mittelstufe konkrete Hypothesen genannt. Im Kapitel 6 werden die Methoden der hypothesenprüfenden Feldstudie beschrieben. Die im Rahmen der Studie gegenübergestellten Unterrichtseinheiten werden im Kapitel 7 und die eingesetzten Leistungstests im Kapitel 8 dargestellt. Kapitel 9 beinhaltet die Umsetzung der Studie an den verschiedenen Schulen und erste Eindrücke aus dem Unterricht. Die Ergebnisse werden im Kapitel 10 vorgestellt und kritisch eingeschätzt. Im Anschluss an die hypothesenprüfende Untersuchung werden die erhobenen Daten unter Berücksichtigung der Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler in einer Exploration im Kapitel 11 weitergehend analysiert. Im letzten Kapitel 12 werden die verschiedenen Ergebnisse zusammengefasst und ein Fazit gezogen.

Kapitel 2

Mentale Werkzeuge – eine Definition

Ein Werkzeug ist für gewöhnlich ein Gegenstand, mit dem sich ein anderer Gegenstand in gewünschter Weise verändern lässt. Mit einer Zange kann ein Stück Metall gebogen, mit einem Hobel Holz geglättet und mit einem Pinsel Farbe auf eine Leinwand aufgetragen werden. Ziel der Benutzung eines Werkzeugs ist immer ein bestimmtes Produkt. Man möchte einen rohen, unbehandelten Gegenstand in eine andere Form bringen, ihn gestalten, etwas Neues herstellen. Um ein Produkt einfach und schnell herstellen zu können, werden Werkzeuge benutzt, sie sollen die Arbeit erleichtern. Man denke an eine Schleifmaschine, die längere, monotone Arbeit erspart. Die meisten uns umgebenden Produkte wären ohne Werkzeuge nicht herstellbar, viele Aufgaben ließen sich nicht bewältigen. Einen Wein ohne Korkenzieher zu öffnen ist nicht möglich, obwohl das Problem sehr überschaubar ist. Um mit einem Werkzeug arbeiten zu können, braucht es Übung und Routine. Ein Novize übt sich in Standardsituationen und erreicht durch Wiederholungen nach einiger Zeit die gewünschten Ergebnisse. So muss ein angehender Künstler den Umgang mit Pinseln üben, Erfahrungen mit Farben sammeln, Bilder nur der Übung wegen malen. Als Erfahrener nutzt er den Pinsel dann kreativ und flexibel, die erstellten Bilder sind neu und bisher unerreichte Ergebnisse können erzielt werden. Werkzeuge sind für eine bestimmte Anwendung geschaffen worden, sie sind für spezielle, wiederkehrende Tätigkeiten optimiert. Für jedes Werkzeug existiert ein spezieller Aufgabenbereich. Um ein bestimmtes Produkt herstellen zu können, muss der Werkende das passende Werkzeug auswählen können. Je nach Werkstück und gewünschtem Produkt sind ein oder mehrere Werkzeuge geeignet, eventuell erfordert das Produkt ein ganz spezielles Werkzeug. Es braucht Erfahrung über Handlungsmöglichkeiten und Beschränkungen des Werkzeugs, um erfolgreich sein zu können.

So gibt es in einem Werkzeugkasten zumeist unzählige Zangen. Um einen Nagel aus der Wand zu ziehen, ist wahrscheinlich jede geeignet, um einen Abfluss zu lösen, wird wegen ihrer Größe nur die Rohrzange geeignet sein.

2.1 Symbole als mentale Werkzeuge

Fasst man den Begriff des Werkzeugs weiter und bezieht neben fassbaren Gegenständen auch andere von Menschen geschaffene Objekte ein, so können auch Sprache, Schrift und anderen Symbole als Werkzeuge verstanden werden. Symbolsysteme dienen nicht nur der Präsentation oder der Fixierung von Informationen, sondern können auch kreativ und produktiv verwendet werden.

> „Symbols can be understood as mental tools that allow for the construction of meaning in concepts, ideas, or plans. Within the mental-tool framework, understanding can be conceptualized as the ability to use representations in flexible ways.“ (Stern et al., 2004, S. 132)[1]

Mit Symbolen lassen sich neue Erkenntnisse gewinnen, indem durch die Formulierung von Gedachtem in Sprache und Schrift Inneres veräußerlicht wird, das heißt, externe Repräsentationen von Mentalem konstruiert werden. Dabei erhalten die Informationen eine neue Strukturierung und können anschließend in veränderter Form wieder verinnerlicht werden (siehe Stern 2001, Kap. 3.2; Mähler und Stern 2006, S. 787 ff.; Felbrich 2005, Kap. 1.2.2). Neue Ideen und Impulse können dabei entstehen, ohne dass es einen Einfluss von anderen gibt. Symbole können dementsprechend als ein mentales oder geistiges Werkzeug begriffen werden, die die Erzeugung eines tiefergehenden Verständnisses ermöglicht.[2]

In wahrscheinlich kompaktester Form werden Symbole in der Mathematik benutzt und nach präzisen Verfahren bearbeitet. Auch sie können als Werkzeuge verstanden werden.

[1] Eigene Übersetzung: Symbole können als mentale Werkzeuge verstanden werden, die es erlauben den Inhalt von Konzepten, Ideen oder Plänen zu erschließen. Im Rahmen von mentalen Werkzeugen kann das Verstehen als die Fähigkeit zur flexiblen Nutzung von Repräsentationen konzeptualisiert werden.

[2] Im Zusammenhang mit dem multimedialen Lernen wird auch ein Computer oder ein Computerprogramm, wie Concept-Mapping-Software, als kognitives Werkzeug, Cognitive Tool, Mind Tool oder Thinker Tool bezeichnet. Die vom Computer erzeugten Darstellungen sollen helfen, Zusammenhänge zu strukturieren und zu erfassen, siehe zum Beispiel Jonassen und Carr (2000); White (1993); Kerres (1998). In der vorliegenden Arbeit wird der Computer jedoch nicht zum Thema gemacht. Als mentale Werkzeuge werden ausschließlich Symbolsysteme, insbesondere Pfeile, betrachtet.

> „Schließlich können auch Darstellungen, Schreibweisen und Notationen als Werkzeuge für mathematisches Denken und das Verständnis mathematischer Begriffe angesehen werden. Werkzeuge gibt es also sowohl auf der gegenständlichen oder enaktiven Ebene, auf der Ebene der mathematischen Objekte (Sätze, Algorithmen) als auch auf der symbolischen Ebene." (Weigand und Weth, 2006, S. 191-192)

Mit mathematischen Symbolen lassen sich komplexe Verhältnisse komprimiert darstellen, aber umso mehr lässt sich mit ihnen arbeiten und produktiv Neues schaffen. Durch das Umformen einer unübersichtlichen Gleichung, zum Beispiel dem Berechnen eines Integrals, wird dieser eine neue Gestalt geben. Aufgrund dieser veränderten Gestalt ist es möglich, die Gleichung anders zu interpretieren und in ihr einen neuen Sinn zu erkennen. Auch ein Graph lässt sich als ein Werkzeug verstehen, denn er ist mehr als nur ein schlichtes Abbild von Daten (Stern et al. 2003, Stern et al. 2004 Felbrich 2005, S. 49 ff.). Vielmehr existieren Bearbeitungsoptionen und Interpretationsmöglichkeiten, zum Beispiel ergeben sich neue Einsichten und Erkenntnisse durch das Betrachten der Steigung oder des Achsenabschnitts. Diese sind die Produkte des Arbeitens mit dem Graphen. Graphen sind entsprechend als Analysewerkzeuge zu sehen, mit denen sich neues Wissen generieren lässt.

Auch der Pfeil ist in verschiedener Hinsicht ein Werkzeug. Im alltäglichen Leben ist er ein universelles und eingängiges Symbol. Mit ihm kann auf ein Objekt gedeutet werden, um es in einer unübersichtlichen Umgebung, zum Beispiel auf einer Landkarte, sichtbar zu machen (Stern 2001, Kap. 3.2). Wir benutzen Pfeile in Form von Schildern, um uns im Straßenverkehr zu orientieren. In Flussdiagrammen lassen sich mit Pfeilen Zusammenhänge verdeutlichen. In der Physik werden Pfeile zur Darstellung gerichteter Größen genutzt. Strukturen können so erkennbar gemacht werden, die Verwendung von Rechenverfahren wird ermöglicht und neue Ergebnisse und damit verbundene Erkenntnis werden produziert. Savelsbergh (1999) sieht in der Benutzung von Pfeilen im Kontext des Hebelgesetzes der Mechanik eine Möglichkeit, reale Situationen derart zu strukturieren, dass die Anwendung des Hebelgesetzes für die Versuchspersonen ersichtlich wird. Durch das Einzeichnen von Pfeilen in lebensnahen Abbildungen zur Darstellung insbesondere der Richtung und des Angriffspunktes einer Kraft soll es den Versuchspersonen gelingen, die Situation im Sinne des anzuwendenden Gesetzes zu deuten (siehe Kapitel 4.3.2).

Neben der kompakten und abstrakten Darstellung einer Größe lassen sich Pfeile auch weitaus produktiver einsetzen, wenn sie um einen mathematischen Formalismus erweitert werden. Ergänzt man Pfeile um ein mathematisches Regelwerk an Benutzungs- und Konstruktionsvorschriften, wie der zeichnerischen Addition, entsteht ein geometrischer Repräsentant eines mathematischen Vektors und es werden entsprechend Rechenverfahren der Vektorrechnung verfügbar. Mit solchen Pfeilen lassen sich komplizierte, physikalische Probleme bearbeiten und entsprechend existieren viele, erfolgreiche Vorschläge zur Verwendung von Pfeilen auch im Physikunterricht (siehe Kapitel 4.1 und insbesondere Jung et al. 1977; Wodzinski 1996; Wilhelm 2005, Boczianowski 2007).

Der Werkzeugcharakter lässt sich klar ausmachen: Mit dem Pfeil ist dem Handelnden ein Objekt gegeben, mit dem er operieren und hantieren kann. Das Produkt seines Tuns wird als geometrische Darstellung, zum Beispiel in Form eines Summenpfeils verschiedener Kräfte oder Geschwindigkeiten, erkennbar. Die damit verbundene Erkenntnis und das so gewonnen Wissen sind das mentale Produkt des Handelns.

Es sei an dieser Stelle zusammengefasst, dass nach bisherigen Überlegungen ein mentales Werkzeug als ein Symbolsystem zu verstehen ist, das Informationen in kompakter, abstrakter und strukturierter Weise darzustellen vermag und gleichzeitig Handlungsoptionen eröffnet. Durch die Manipulation der Symbole lassen sich neue Erkenntnisse und neues Wissen erzeugen. Im Folgenden wird dargestellt werden, wie mentale Werkzeuge als Instrument zum Lösen von Problemen dienen.

Ein Problem zu lösen bedeutet durch bewusstes Handeln ein bestimmtes, selbst gewähltes Ziel zu erreichen (Anderson, 1996, Kap. 8.). Dazu wird, von trivialen Problemen abgesehen, das angestrebte Ziel vom Handelnden in Teilziele unterteilt. Diese Teilziele werden durch bestimmte Operationen, die der Handelnde beherrscht, nacheinander umgesetzt und so das Gesamtziel erreicht. Das alltägliche Leben ist geprägt vom Lösen größerer und kleinerer Problemstellungen, denn in den seltensten Fällen führen Handlungen direkt zum Ziel. Scheinbare Umwege müssen genommen werden. Wird zum Beispiel das Ziel verfolgt einen Kaffee zu trinken, so lässt sich dieses Problem in Teilziele zerlegen: Wasser kochen, Pulver und Filter verfügbar machen und präparieren. Ein anderer Lösungsweg wäre es das Haus zu verlassen und ins Café zu gehen oder zum Telefonhörer zu greifen und sich einen Kaffee bringen zu lassen, wenn das Umfeld diese Möglichkeiten bietet.

Das Erreichen des Gesamtzieles geschieht folglich durch eine Abfolge mehrerer, dem Handelnden bekannter Operationen. Der Handelnde muss zum Lösen von Problemen entsprechendes Wissen über verschiedene Prozeduren besitzen. Dieses sogenannte Prozedurenwissen oder auch Anwendungswissen umfasst festgelegte Handlungsfolgen (Stern, 1997; Stern und Hardy, 2002).[3] Ein Beispiel aus der Mathematik für solch eine Handlungsfolge ist die schriftliche Addition mehrerer Zahlen, hierbei werden Zahlen nach fester Vorschrift übereinander geschrieben. Ist dieses Zwischenziel erreicht, werden in weiteren Schritten einzelne Ziffern Spaltenweise verarbeitet, Überträge fixiert und so weiter. Letztendlich wird das Gesamtziel auf diese Weise erreicht. Dabei sind bestimmte Fakten zu kennen, denn um spaltenweise zu addieren, müssen die Summen einzelner Ziffern dem Handelnden bekannt sein. Dieses Wissen, das benennbare, gespeicherte Informationen umfasst, wie auswendig gelernte Ergebnisse, Vokabeln, Definitionen oder Formeln, wird Faktenwissen genannt (Schneider 2005, vgl. Anderson 1996, Kap. 8.). Es ist einfach einzusehen, dass mit dem Wissen von Fakten wiederkehrende, einfache Zielstellungen, wie die oben genannten Ergebnisse von Rechenaufgaben, sehr schnell zu lösen sind.

Zum Problemlösen ist Wissen um Fakten und Prozeduren allein nicht ausreichend, denn um das gesteckte Ziel zu erreichen, sind die geeigneten Operationen und Prozeduren zuvor auszuwählen. Es ist eine Strategie zum Vorgehen zu entwickeln. Dazu sind Kenntnisse über Anwendungsmöglichkeiten verschiedener Prozeduren notwendig, sogenanntes Strategiewissen oder Problemlösendes Wissen (siehe Stern 1997, S. 400 ff.; Stern und Hardy 2002, S. 156 ff.). Gerade die Auswahl der geeigneten Prozedur ist in vielerlei Hinsicht schwierig. Die Situation muss gedeutet werden, wobei Flexibilität von großer Wichtigkeit ist. Zur Auswahl der geeigneten Prozeduren werden Kenntnisse über Standardsituationen sowie Wissen über Klassifikationen von Problemsituationen benötigt (Reif, 1987, S. 404 ff.). Das Wissen über eine Standardsituation im Kontext der Mechanik ist zum Beispiel, dass die Beschleunigung eines sich im Kreis bewegenden Körpers, im Fall des konstanten Geschwindigkeitsbetrags, auf den Kreismittelpunkt gerichtet ist. Klassen von Problemsituationen sind in diesem Kontext die geradlinigen Bewegungen gegenüber den nicht-geradlinigen Bewegungen. Für die erste Klasse ist die Beschleunigung gleich oder entgegengesetzt der Bewegung gerichtet, für die zweite Klasse zeigt die Beschleunigung ins Innere eines Bahnkurvenabschnitts.

Um bekannten oder unbekannten Problemen effektiv und möglichst universell begegnen zu können, um dementsprechend nicht jedes Mal auf besondere Kreativität oder gar Zufall angewiesen zu sein, ist die Nutzung von mentalen Werkzeugen gewinnbringend und sinnvoll. Der Einsatz des Werkzeugs geschieht dabei in mehreren Schritten, in denen flexible Strategien,

[3] In Schneider (2005) ist eine Übersicht zu verschiedenen Definitionen von Wissenstypen und ihren Synonymen zu finden. Beispiele sind conceptual & procedural knowledge, declarative & procedural knowledge, knowing that & knowing how to, explicit & implicit knowledge. Vergleiche auch (Anderson, 1996, Kap. 8.)

feste Prozeduren und Fakten in oben vorgestellter Weise eine Rolle spielen.

Um ein Problem mit verfügbaren Prozeduren überhaupt bearbeiten zu können, ist die Situation zu abstrahieren und zu modellieren und insbesondere in eine symbolische Form zu bringen (Tietze et al. 2000, Kap. 1.2; Neubrand et al. 2002; Stern 1997, S. 405). Um die Darstellungsformen geeignet wählen zu können, müssen die dem Problem zugrunde liegenden Strukturen erkannt werden. Es bedarf Kenntnisse über Standardsituationen, Klassifikationen und zugehörigen Strategien, aber auch über das Potenzial der Darstellungsform und der mit der Darstellung verbundenen Prozeduren. Entscheidend bei der Entwicklung der Strategie ist Flexibilität in der Nutzung der symbolischen Darstellungen.

> „Die Schüler müssen lernen, das Repertoire an mathematischen Werkzeugen angemessen zur Lösung von Problemen, welche sich formal abbilden lassen, zu nutzen. Sie müssen verstehen welche Möglichkeiten Zahlen, Operationssymbole oder geometrische Figuren zur Modellierung von realen und hypothetischen Situationen bieten.[. . .]
>
> Gleichzeitig müssen die Schüler verstehen, welche Einschränkungen zu beachten sind, wenn mathematische Symbole genutzt werden sollen, um bestimmte Inhalte abzubilden. Zu diesen Einschränkungen gehören neben rein mathematischen Regeln auch Konventionen bei der Darstellung, welche die inhaltliche Interpretation vereinfachen.“ (Stern und Hardy, 2002, S. 156)

Mögliche mathematische Darstellungsformen, wie sie im Weiteren von Interesse sein sollen, sind Zahlen, Graphen oder Pfeile. Um zum Beispiel die Anzahl von gestapelten Kisten zu bestimmen, ist es sinnvoll eine Zahlendarstellung zu wählen und die Ordnung der Kisten durch ein Produkt zu modellieren. Dazu muss jedoch Strategiewissen existieren, das in der geometrischen Struktur der Verpackung ein Produkt erkennen lässt. (Eine andere Lösungsstrategie ohne nennenswerten Modellierungsaufwand wäre das Abzählen der Kisten.) Ist das Problem anderer Natur, sind andere Darstellungsformen eventuell geeigneter, so lassen sich zeitliche Verläufe übersichtlich durch Graphen und gerichtete, physikalische Größen durch Vektoren (geometrisch oder arithmetisch) darstellen. Die Bewegung eines Bootes auf einem Fluss lässt sich zum Beispiel durch zwei Pfeile und deren Addition modellieren, siehe dazu Kapitel 3.

Der zweite Schritt in der Handhabung eines mentalen Werkzeugs ist die Nutzung fester Prozeduren im symbolischen Raum. Im Kontext des Kistenproblems könnte dies die schriftliche Multiplikation von Zahlen sein, die erst durch die Übertragung des Problems in den Zahlenraum möglich ist. An verschiedenen Stellen fließt das Wissen von Fakten ein, dies reicht von der Darstellung von Werten durch Zahlen bis zu Konventionen und Regeln der Multiplikation. Im Kontext des zeichnerischen Rechnens mit Vektoren lassen sich mithilfe fester Prozeduren Summen, Differenzen (siehe z. B. Wodzinski und Wiesner, 1994b) und auch Projektionen umsetzen (Vogt, 2005). So erfordert die geometrische Addition von Pfeilen das Abarbeiten fester Handlungsschritte wie dem Verschieben der Pfeile zu einem Polygonzug und dem anschließenden Einzeichnen des Ergebnispfeils. Wichtige Fakten sind zum Beispiel, dass Pfeile mit einem gerade Schaft zu zeichnen sind und anders geformte Körper nicht zulässig sind. Es ist also ein Wissen um Definitionen und Konventionen notwendig, um Pfeile im Sinne eines Vektors nutzen zu können.

Der abschließende Schritt bei der Nutzung eines symbolischen Werkzeugs zur Lösung eines Problems ist es, das Ergebnis vom Modell auf die reale Welt zu beziehen. So muss im aufgeführten Beispiel das berechnete Produkt mit der gesuchten Anzahl von Kisten identifiziert werden. Der Schnittpunkt von zwei Graphen könnte einen gesuchten Zeitpunkt oder die Differenz zweier Geschwindigkeitspfeile die abzuschätzende Beschleunigung bedeuten.

Die bisherigen Überlegungen lassen sich an dieser Stelle wie folgt zusammenfassen. Mit mentalen Werkzeugen lassen sich Probleme bearbeiten und lösen. Eine Überführung in eine symbolische Darstellung ist dazu vorzunehmen. Flexibilität im Umgang mit symbolischen Darstellungen ist zur Entwicklung einer Strategie von Wichtigkeit. Gleichzeitig kann durch das Erstellen der Darstellung die zugrunde liegende Struktur des Problems herausgearbeitet werden. Anschließend lässt sich die symbolische Darstellung prozedural manipulieren, um Zwischenziele zu erreichen. Mit einem abschließenden Bezug des Ergebnisses in Symbolform auf das reale Problem ist das Gesamtziel erreicht.

Bisher sind die zu bewältigenden Probleme nicht differenziert worden, oben beschriebene Bearbeitungsverfahren gelten sowohl für bekannte wie auch unbekannte Probleme. Es ist jedoch das höhere Ziel eines jeden Unterrichts, dass die Lernenden auch in neuen Situationen angemessen reagieren können und handlungsfähig sind. Dazu ist das Erlernte in neue Wissensbereiche zu transferieren. Es ist viel belegt, dass sich der Transfer von Wissen selten erzeugen lässt (Stern, 2001). Oberflächenmerkmale sind in unbekannten Situationen dominierend und die Anwendbarkeit eines, wenn auch verfügbaren Werkzeugs, wird nicht erkannt. Um neue Probleme lösen zu können, muss das Wissen flexibel sein. Durch das Loslösen von konkreten Inhalten sollte der Transfer in neue Inhaltsbereiche leichter fallen. Symbole, verstanden als mentale Werkzeuge, bieten sich dabei an, als Träger von Wissen zu fungieren. Durch die Nutzung von Symbolen sind Bearbeitungsabläufe abstrakt gespeichert und nicht an spezielle Inhalte gebunden. Außerdem kann durch das Erstellen einer symbolischen Darstellung die zugrunde liegende Struktur eines Problems erkennbar gemacht und mögliche, nutzbare Prozeduren offengelegt werden. Empirische Studien konnten zeigen, dass Graphen, wenn sie im Sinne eines mentalen Werkzeugs erlernt worden sind, Transfer fördernd sein können (siehe Kapitel 4.3 und insbesondere Stern et al. 2003; Felbrich 2005; Hardy et al. 2005; Stern et al. 2004). Mentale Werkzeuge machen es demnach möglich, Wissen in neuen Bereichen nutzbar zu machen. Analog dazu scheinen Pfeile in ihrer Form als geometrische Vektoren, inklusive Regelwerk und den damit verbundenen Handlungsoptionen, als mentale Werkzeuge funktionieren zu können. Entsprechend sollte sich mit Pfeilen Wissen zwischen verschiedenen Inhaltsbereichen transferieren lassen. Der empirische Beleg dieser Annahme ist das Ziel der durchgeführten Feldstudie, die ab Kapitel 5 vorgestellt wird.

2.2 Zusammenfassung

Im vorangegangenen Kapitel ist das theoretische Konstrukt des mentalen Werkzeugs auf Grundlage von Forschungsarbeiten anderer für diese Arbeit definiert worden. Folgende Charakteristika lassen sich zusammenfassend darstellen:

- **Handeln und Produzieren.** In Analogie zu einem gegenständlichen Werkzeug macht es auch ein mentales Werkzeug aus, dass sich mit diesem agieren und handeln lässt und der Handelnde dabei kreativ und produktiv tätig wird. Der Schaffensprozess besteht dabei aus Prozeduren und festen Handlungsabläufen, die zu erlernen sind und deren Auswahl Erfahrung und Wissen um Strategien erfordert. Das Produkt des Schaffens zeigt sich zum einen real in Gestalt manipulierter Symbole und zum anderen vor allem mental in Form neuen Wissens, Erkenntnissen und hinzugewonnenem Verständnis.

- **Strukturen und Regeln.** Die als mentale Werkzeuge benutzten Symbole sind nicht beliebig gestaltbar, sondern sind strukturiert und unterliegen Regeln in der Interpretation und Nutzung. Prozeduren werden in diesen abstrakten, teils mathematischen Räumen anwendbar und liefern reproduzierbare, definierte Resultate.

- **Modellierung und Flexibilität.** Um abstrakte Prozeduren anwenden zu können, muss das vorgefundene Problem modelliert werden, das heißt, dass ein Modell erstellt werden muss, das die relevanten Strukturen des realen Problems enthält und gleichzeitig Optionen zur geeigneten Manipulation eröffnet. Das Erstellen der Darstellung kann eine neue Perspektive verschaffen, kann helfen Strukturen sichtbar zu machen und damit eine neue Interpretationsmöglichkeit schaffen. Um eine geeignete Darstellungsform zu finden, wird strategisches Wissen, also Erfahrung und Flexibilität im Umgang mit verschiedenen Darstellungsformen benötigt.

- **Abstraktheit und Transfer.** Ein mentales Werkzeug zu nutzen, bedeutet, eine Darstellung für ein Problem zu finden und diese derart mittels Prozeduren zu manipulieren, dass sich eine Lösung ableiten lässt. Das benötigte Wissen um die Prozeduren ist dabei nicht an spezielle Inhalte gebunden, sondern abstrakt und kompakt gespeichert. Entsprechend sollten mentale Werkzeuge den Transfer von Wissen in neue Inhaltsbereiche fördern. Für mathematische Graphen konnte dies empirisch belegt werden.

Kapitel 3

Pfeile – Erscheinungsformen und Verwendung

Pfeile können in verschiedenster Weise benutzt werden und tauchen im Alltag, in der Schule und im Studium in unterschiedlichen Zusammenhängen auf. Mehrere Typen von Pfeilen lassen sich ausmachen, die vom gewöhnlichen Pfeil bis zur Darstellung von Vektoren der Mathematik reichen (Boczianowski und Schön, 2007). Aufgrund detaillierter Konventionen werden die Handlungsoptionen für die jeweiligen Typen von Pfeilen umfangreicher und die Ergebnisse präziser. Ähnlichkeiten zwischen den Typen bieten sich in einem Unterricht als Anknüpfungspunkte an. Durch die Differenzierung der Pfeiltypen wird im Folgenden außerdem das Konzept der geometrischen Vektorrechnung, auf dem der Fokus der Arbeit liegt, gegen andere Arten der Nutzung von Pfeilen abgegrenzt. Anschließend werden die Verfahren und Prozeduren der geometrischen Vektorrechnung und Besonderheiten im Zusammenhang mit den dargestellten physikalischen Größen vorgestellt, um die empirischen Forschungsarbeiten im Kapitel 4 verständlich zu machen.

3.1 Pfeile und Vektoren

Lebensweltliche Pfeile

Im täglichlichen Leben werden Pfeile genutzt, um auf ewas zu deuten, um zum Beispiel in einer Skizze einen Punkt herauszuheben. Ebenso sind sie als Zeiger an Uhren und Messgeräten zu finden. Die Form eines Pfeils ist dabei weitestgehend frei, eine Spitze und ein Schaft müssen erkennbar sein, um eine Funktion zu gewährleisten. Die Pfeilspitze ist der herauszuhebenden Position zugewandt, die Position des Schaftes spielt keine Rolle. Auch werden Pfeile genutzt, um Richtungen anzugeben, in die man sich oder Gegenstände bewegen kann. Der Schaft bezeichnet bei dieser Art der Handhabung zumeist einen Weg. Er kann den Verlauf einer Straße beschreiben, den Öffnungsmechanismus an einer Verpackung vermitteln, in einem Flussdiagramm den Ablauf von Prozessen darstellen oder auf den Tasten eines Computers die Verschiebung der Eingabemarkierung symbolisieren, siehe Abb. 3.1.

Betragspfeile

Das Pfeilsymbol lässt sich um ein Merkmal erweitern. Durch Dicke, Länge, Form oder Farbe eines Pfeils ist eine Intensität oder ein Betrag einer Größe darstellbar. Schülerinnen und Schüler machten in der Unterrichtseinheit der Studie Vorschläge, über die Feder am Ende des Pfeilschaftes einen Betrag darzustellen, siehe Kapitel 7. Dabei gab die Anzahl der eingezeichneten Ästchen in der Fahne der Feder einen Zahlenwert an. Auch gab es Vorschläge durch eine dynamische Gestaltung des Schaftes, ähnlich einem Sturm oder Blitz, oder einer Variation der Farbe Abstufungen in der Intensität zu vermitteln. Stufenlos lässt sich ein Betrag durch die Breite eines Pfeiles darstellen. Je breiter ein Pfeil gezeichnet ist, um so größer ist zum Beispiel im Kontext der Geographie die Anzahl der Auswanderer oder Rohstoffe, siehe Abb. 3.2. Gleichzeitig kann durch den Schaft des Pfeiles ein Weg dargestellt werden. In der Physik finden sich derartige Pfeile in Energieflussdiagrammen, in denen Pfeile unterschiedlicher Breite die Stärke von Energieströmen darstellen, siehe Abb. 3.3. Davon abgesehen hat es sich in der Mathematik und der Physik als praktikabel erwiesen, den Betrag einer Größe durch die Länge eines Pfeiles darzustellen. Der Schaft des Pfeiles unterliegt damit festen Regeln, eine Nachempfindung eines Weges, wie bei Verkehrschildern oder comicartigen Beschreibungen von Bewegungen, ist nicht zulässig. Der Schaft muss abmessbar, also gerade sein. Durch einen Längenmaßstab ist eine Beziehung zwischen der gezeichneten Pfeillänge und der dargestellten physikalischen Größe zu definieren. Dies kann durch eine Maßstabsleiste geschehen, wie man es von Landkarten kennt (siehe auch Abb. 3.11 auf S. 25).

Geometrische Vektoren – Vektorpfeile

Neben der Darstellung von Betrag und Richtung einer Größe ist es möglich, mit Pfeilen auf Grundlage der mathematischen Vektorrechnung zu agieren, also Berechnungen durch das Zeichnen und Konstruieren von Pfeilen umzusetzen. Es ist im Rahmen der Schule durchaus sinnvoll, einen mathematischen Vektor mit einem Pfeil zu identifizieren, der durch Ausrichtung und Länge festgelegt ist (vergleiche Kapitel 4.2.2). Die Position eines sol-

Abb. 3.1: Pfeile auf einem Hinweisschild, als Kreidezeichnung auf der Straße, einer Verpackung und einer Computertastatur

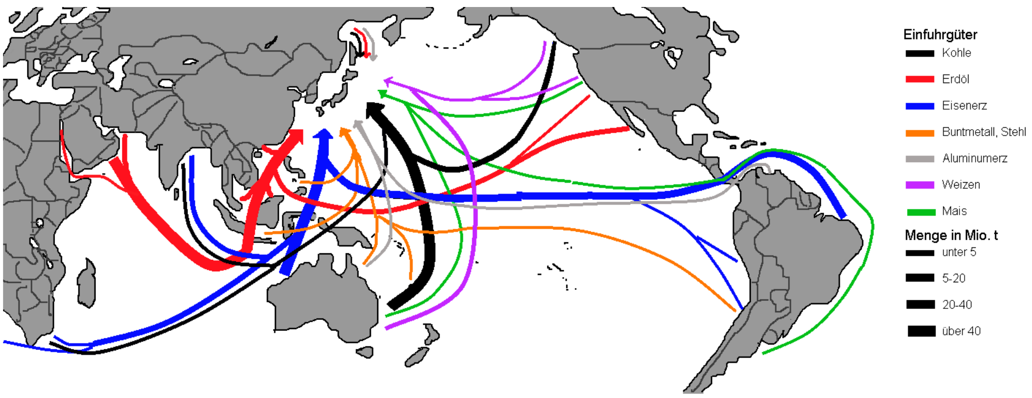


Abb. 3.2: Betragspfeile in der Geografie (Abb. ähnlich „Diercke Weltatlas“, Michael 2002, S. 233)

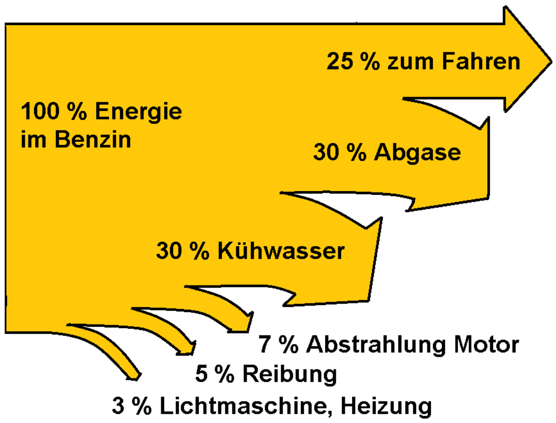


Abb. 3.3: Betragspfeile in der Physik (Abb. ähnlich „Impulse Physik“, Bredthauer et al. 2002, S. 251)

chen Vektorpfeils ist dabei, abgesehen von später ausgeführten Ausnahmen, ohne Bedeutung und dieser somit unter Erhalt von Ausrichtung und Länge frei verschiebbar. Der Vektorpfeil lässt sich so als handhabbares Objekt verstehen, der neben der Länge und Ausrichtung auch die Eigenschaft der Verschiebbarkeit besitzt. Mit verschiedenen Konstruktionsvorschriften lassen sich Addition, Subtraktion, skalare Multiplikation und Skalarprodukt zeichnerisch umsetzen.

Die geometrische Vektorrechnung ist ein für sich geschlossenes Konzept, mit dem sich in verschiedenen Inhaltsbereichen Modellierungen und Mathematisierungen umsetzen lassen. Physikalisch anspruchsvolle Problemstellungen können bearbeitet und physikalische Gesetzmäßigkeiten kompaktund klar beschrieben werden, die sonst in Gestalt von Formeln und Zahlen nicht vergleichbar zum Vorschein treten. Weniger lebensweltliche Größen lassen sich schrittweise entwickeln und verstehbar machen. Mit diesen Vektorpfeilen ließe sich, ähnlich mathematischen Graphen, für die Schülerinnen und Schüler eine Darstellungsform etablieren, die jahrgangsübergreifenend und fächerübergreifend vernetzt und deren Aneigung dementsprechend für die Lernenden Sinn macht.

Arithmetische Vektorrechnung und Vektorraum

Eine unüberschreitbare Grenze der geometrischen Vektorrechnung ist die fehlende Möglichkeit, mit Unbekannten zu rechnen. Den beschriebenen Vektorpfeilen sind damit deutliche Grenzen gesetzt. Variablen lassen sich geometrisch nicht umsetzen und sind einer arithmetischen Vektorrechnung mit Variabelsymbolen vorbehalten.

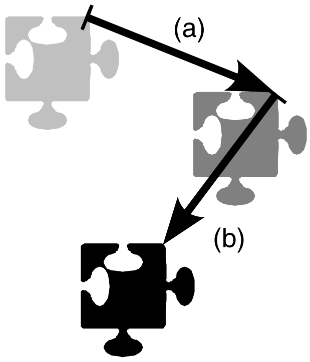


Abb. 3.4: Vektorpfeile für die Verschiebung eines Puzzlestückes

Vektorpfeile lassen sich auf einfache Weise mit Zahlentupeln arithmetisieren. Die Berechnungen in der Spaltennotation sind präzise, entziehen sich jedoch der direkten Anschauung. Gezeichnete Pfeile können zur Visualisierung herangezogen werden und somit zum Verständnis beitragen. Auf universitärem Niveau ist die Identifikation des Vektors mit einem Pfeil nicht ausreichend. Der Vektorraum wird zum zentralen Begriff, zu dem die Pfeile nur einführend hilfreich sein können (vergleiche Kapitel 4.2).

3.2 Verwendung von Vektorpfeilen

Mit Vektorpfeilen lassen sich mechanische Größen wie der Ort, die Geschwindigkeit oder die Kraft, aber auch periodische Größen wie die Amplitude des elektrischen Wechselstroms, des Lichts oder einer Wahrscheinlichkeitsdichte der Quantenphysik darstellen. Diese werden im folgenden „Anwendungen" genannt. Teilweise unterscheiden sich die Nutzungsregeln je nach Anwendung der Pfeile erheblich. An anderer Stelle sind bestimmte Verfahren naheliegender als andere.

3.2.1 Vektorpfeile in der Mechanik

Die wahrscheinlich einfachste Anwendung eines Vektorpfeils ist die Verschiebung. Im Fall eine geradlinigen Verschiebung steht der Pfeilschaft für den zurückgelegten Weg des verschobenen Objektes. Die Ausrichtung des Pfeils gibt die Richtung der Verschiebung an, siehe Abb. 3.4. Ein Problem junger Schülerinnen und Schüler besteht im Zusammenhang mit dem Begriff Richtung, da dieser im Alltäglichen neben der Bewegungsrichtung auch auf

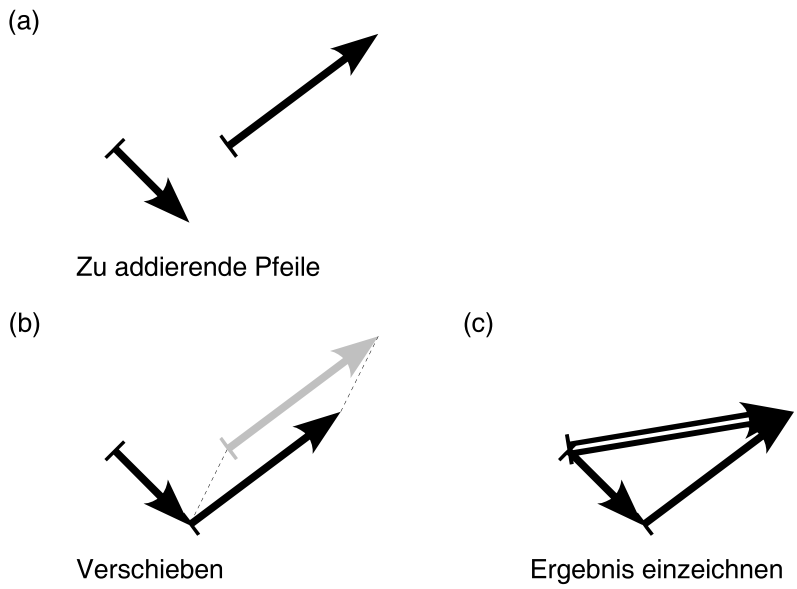


Abb. 3.5: Zeichnerische Addition von Vektorpfeilen nach dem Polygonzugverfahren: Der Fußpunkt des einen Pfeils ist an die Spitze des anderen zu bringen. Der Ergebnispfeil ist in den Polygonzug vom Fuß zur Spitze einzuzeichnen.

das Ziel einer Bewegung bezogen sein kann (siehe Wodzinski und Wiesner 1994a,b,c; Wittmann 2003, Kap. 1.3.1 und 2.1.7).[1] Auch die Frage nach der Richtung einer Kreisbewegung kann im Alltag mit „im Kreis“ beantwortet werden. Die Problematik ist im Unterricht entsprechend zu diskutieren.

Der Verschiebungspfeil ist ein „freier Vektor“, das heißt, dass er an beliebiger Stelle, vorzugsweise an einer Stelle des verschobenen Objekts angezeichnen werden kann (Wittmann 1996; Grosche et al. 1989, Kap. 4.2). Die Addition von Verschiebungspfeilen ist naheliegend. Werden mehrere geradlinige, nacheinander ausgeführte Verschiebungen mit Pfeilen dargestellt, ergibt sich ein Polygonzug aus Pfeilen. Der Schaft der Resultierenden ist zwar vom realen Weg verschieden, jedoch ist er als effektiver beziehungsweise kürzester Weg vermittelbar (Bolter, 1998; Roche, 1997). Enstprechend ist im Fall krummliniger Verschiebung argumentierbar. In Abb. 3.5 ist die Prozedur für die Addition nach dem Polygonzugverfahren im Fall nicht zusammenliegender Pfeile dargestellt.

Anders als Verschiebungspfeile sind Ortspfeile an den Ursprung „gebundene Vektoren“, siehe Abb. 3.6 (Grosche et al. 1989, Kap. 4.2). Aus der Sub-

[1]So können zum Beispiel mehrere Gegenstände von links und rechts „in Richtung Tischmitte“ verschoben werden. Die zugehörigen Verschiebungspfeile hätte dann jedoch unterschiedliche Ausrichtungen.

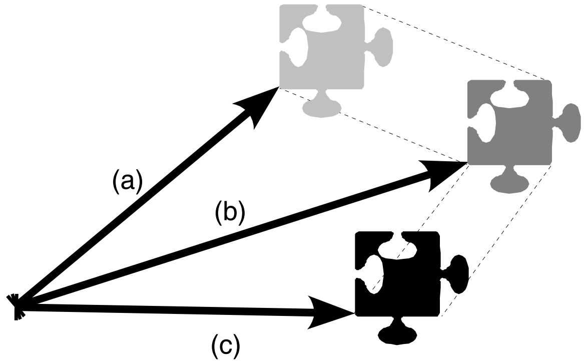


Abb. 3.6: Ortspfeile des Puzzlestücks für die Verschiebung von Abb. 3.4

traktion zweier Ortspfeile ergibt sich ein Verschiebungspfeil (z. B. Wilhelm 2005; Wilhelm und Heuer 2002a). Geometrisch lässt sich diese entsprechend Abb. 3.7 umsetzen. Für Ortspfeile ist diese Variante naheliegend, da die Fußpunkte bereits zusammenliegen. Eine Addition von zwei Ortspfeilen ist nicht interpretierbar.

Ein Geschwindigkeitspfeil ist in die Richtung der Bewegung eines Objektes ausgerichtet. Die Länge des Pfeils gibt den momentanen Geschwindigkeitsbetrag, also das Tempo im Sinne eines aktuellen Tachostandes, wieder. Damit steht die Länge des Pfeils, anderes als bei den bisher aufgeführten Größen, nicht für eine räumliche Entfernung. Eine Vermischung mit dem Ort ist nicht abwegig, da in der Länge eines Geschwindigkeitspfeils eine in einer bestimmten Zeitspanne potenziell zurücklegbaren Wegstrecke gesehen werden kann. Jedoch darf nicht in der Spitze eines Geschwindigkeitspfeils der Endpunkt einer Bewegung gesehen werden (Jung et al., 1977, S. 64). Um dem vorzubeugen, kann ein separater Pfeilplan abseits der ortsbeschreibenden Skizze gezeichnet werden (Bolter 1998; Boczianowski 2007). Für Geschwindigkeitspfeile existieren sinnvolle Bedeutungen für die Addition und Subtraktion. Beide Rechenarten sind für mathematische Modellierungen verschiedener Situationen anwendbar. Mit der Subtraktion zweier Geschwindigkeitspfeile eines bewegten Objektes lässt sich die Geschwindigkeitsänderung und damit qualitativ auch die Richtung der Beschleunigung als Pfeil bestimmen (z. B. Jung et al. 1977; Wodzinski und Wiesner 1994b; Wilhelm und Heuer 2002a). Für die Konstruktion sind die Pfeile im Gegensatz zu den Ortspfeilen zu verschieben, da die Geschwindigkeitspfeile räumlich auseinanderliegen, siehe Abb. 3.8. Durch die Bestimmung der Beschleunigung mithilfe von Pfeilen kann auf qualitativem Weg ein Verständnis für diese nicht ohne Weiteres beobachtbare Größe entwickelt werden, das deutlich über eine Vor-

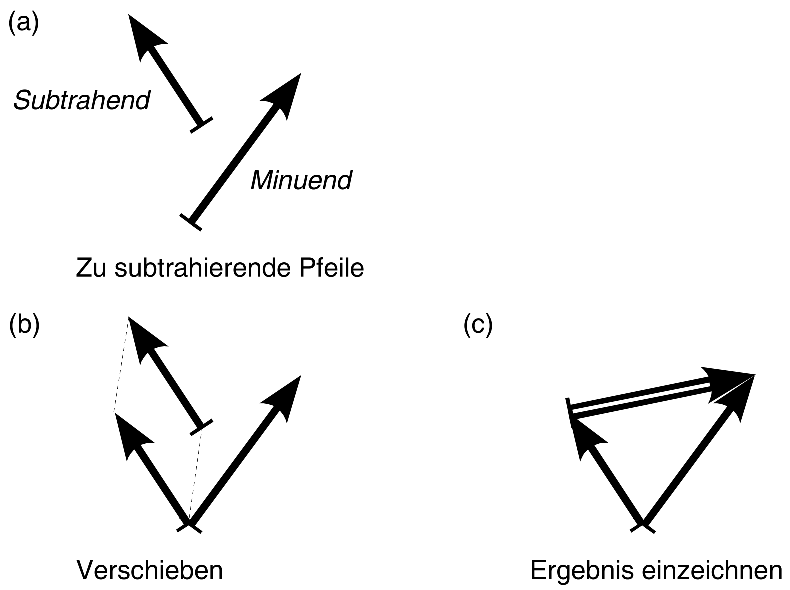


Abb. 3.7: 1. Variante der Subtraktion von Pfeilen: Die Pfeile sind mit den Fußpunkten zusammenzuschieben. Der Ergebnispfeil ist vom Subtrahenden zum Minuenden einzutragen.

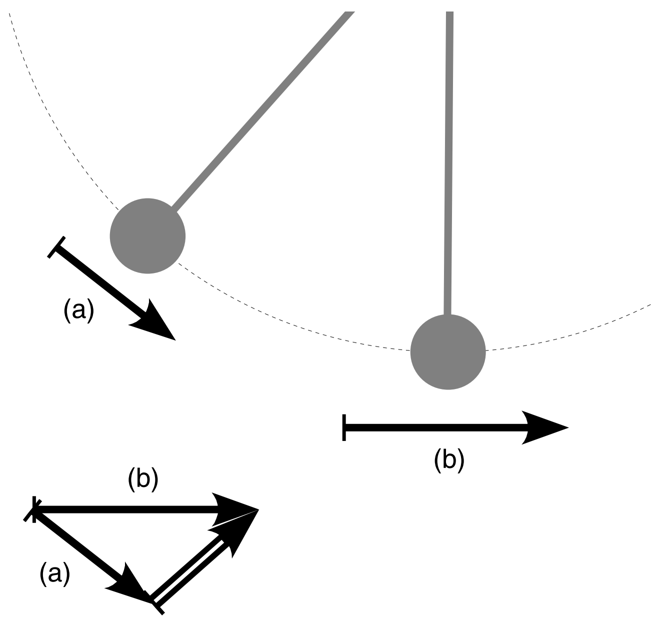


Abb. 3.8: Bestimmung der Beschleunigungsrichtung am Pendel durch die Subtraktion von Geschwindigkeitspfeilen

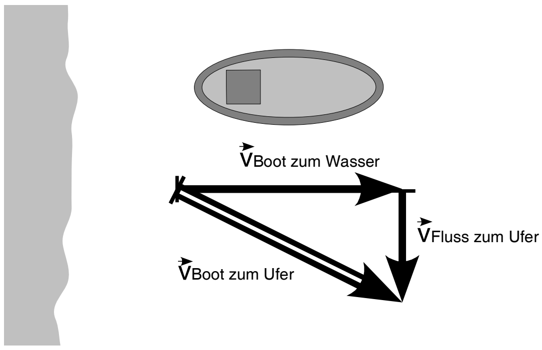


Abb. 3.9: Standardsituation für die Addition von Geschwindigkeitspfeilen: Ein Boot fährt auf einem Fluss.

stellung des skalaren Schnellerwerdens hinausgeht (siehe Kapitel 4.1; Jung et al. 1977; Wodzinski und Wiesner 1994b; Wilhelm und Heuer 2002a). Die Definition der Beschleunigung als Pfeil ist universell, denn sie umfasst die in der Schule ausgeführten Spezialfälle der geradlinigen und der kreisförmigen Bewegungen. Die Addition von Geschwindigkeitspfeilen ist eine Verknüpfung von verschiedenen Objekten und Bezugssystemen zu einem Zeitpunkt. Ein Standardszenario ist in diesem Zusammenhang das auf einem Fluss fahrende Boot (siehe z. B. Schranner 1983; Tietze et al. 2000, S. 42; Giancoli 2006, S. 87-89). Die Geschwindigkeit des Flusses und die Geschwindigkeit des Bootes auf dem Wasser lassen sich als Pfeile darstellen und geometrisch addieren, siehe Abb. 3.9. Zu beachten sind die jeweils unterschiedlichen Bezugssysteme.

Die experimentelle Umsetzung der Addition und Subtraktion von Geschwindigkeiten im Schulunterricht ist nicht einfach. Die Geschwindigkeitsbeträge und -richtungen der verschiedenen Objekte und die resultierende Geschwindigkeit sind gleichzeitig zu bestimmen. Die mehrdimensionale Erfassung der Geschwindigkeit eines einzelnen Objekts gelingt zuverlässig mit der Computermaus (z. B. Reusch und Heuer 1998; Schmidt et al. 2002). Indirekt ist die Bestimmung der Geschwindigkeitspfeile über die Verschiebung möglich (siehe Kapitel 7). Hierzu ist physikalisches Vorwissen zum Zusammenhang von Weg, Zeit und Geschwindigkeit und auch von Momentan- und Durchschnittsgeschwindigkeit vonnöten. Eine Umsetzung mit Stroboskopaufnahmen ist bei Wodzinski und Wiesner (1994a,b,c) zu finden.

Kraftpfeile sind bezüglich ihrer Nutzung speziell. Es ist üblich mit dem Fußpunkt des Pfeils den Angriffspunkt der Kraft zu markieren (siehe Schulbücher: Bader und Oberholz 2006, S. 31; Kuhn 1996, S. 117; Bredthauer et al. 2002, S. 171; Mikelskis et al. 2006, S. 124). Dieses Merkmal unterscheidet sich vom Ursprung der Ortspfeile, da mehrere Angriffspunkte in einem

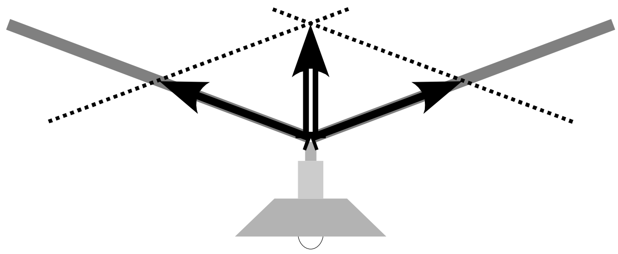


Abb. 3.10: Parallelogrammkonstruktion zur Bestimmung der resultierenden Kraft zweier Zugkräfte. Die Spitze der Resulierenden ergibt sich durch das Zeichnen zweier Konstruktionslinien, die parallel zu den zu addierenden Pfeilen verlaufen.

Szenario existieren können. Diese Art von Kraftpfeil ist innerhalb einer Skizze nicht verschiebbar und an einen speziellen Angriffspunkt gebunden. In diesem Fall ist als Additionsverfahren die Parallelogrammkonstruktion konsequent, da der Fußpunkt der Summanden und der Resultierenden derselbe ist, siehe Abb. 3.10. Gegen diese Konstruktion und für das zuvor beschriebene Polygonzugverfahren spricht jedoch die Unübersichtlichkeit der Addition im Fall von mehr als zwei Pfeilen. Auf die Festlegung des Angriffspunktes durch den Fußpunkt kann verzichtet werden, indem jedem Angriffspunkt ein Kraftplan zugewiesen wird, wie auch mathematisch exakt ein Vektorraum von Kraftvektoren nur einem einzigen Angriffspunkt zugeordnet ist, siehe Abb. 3.11.

Innerhalb des Kraftplans sind die Pfeile frei verschiebbar und so ist es möglich, Kraftpfeile wie die Pfeile anderer Anwendungen als freie Vektoren zu handhaben. Die Idee eines Kraftplans entspringt dem Vorschlag von Bolter (1998), Geschwindigkeits- und Beschleunigungspfeile räumlich getrennt in Skizzen zu bearbeiten, um eine Vermischung dieser zu verhindern. Die Übersichtlichkeit der Kraftpläne wird bei der Betrachtung von mehreren Angriffspunkten deutlich, siehe Abb. 3.12 (Boczianowski und Schön, 2006a,b,c; Boczianowski, 2007). Im Fall der Statik ergeben sich für die Kraftsumme pro Angriffspunkt stets charakteristische, geschlossene Polygonzüge aus Pfeilen. Experimentell lässt sich die Addition von Kraftpfeilen einfacher mit Federkraftmessern nachvollziehen, siehe Kapitel 7.

Ausgehend von der Addition nach dem Polygonzugverfahren lässt sich eine ähnliche Vorgehensweise für die Subtraktion entwickeln. Die Handlungsfolge ist um die Umkehrung des abzuziehenden Pfeils zu ergänzen, Abb. 3.13. Um die Subtraktion als eine Addition mit umgekehrtem Subtrahenden zu verstehen, ist Vorwissen zu negativen Zahlen notwendig (siehe Kapitel 7).

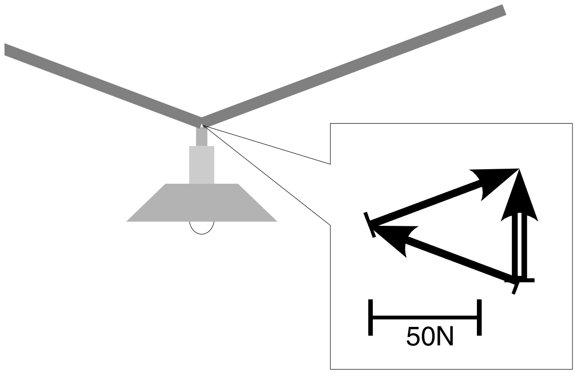


Abb. 3.11: Polygonzugverfahren zur Bestimmung der resultierenden Kraft zweier Zugkräfte in einem Kraftplan

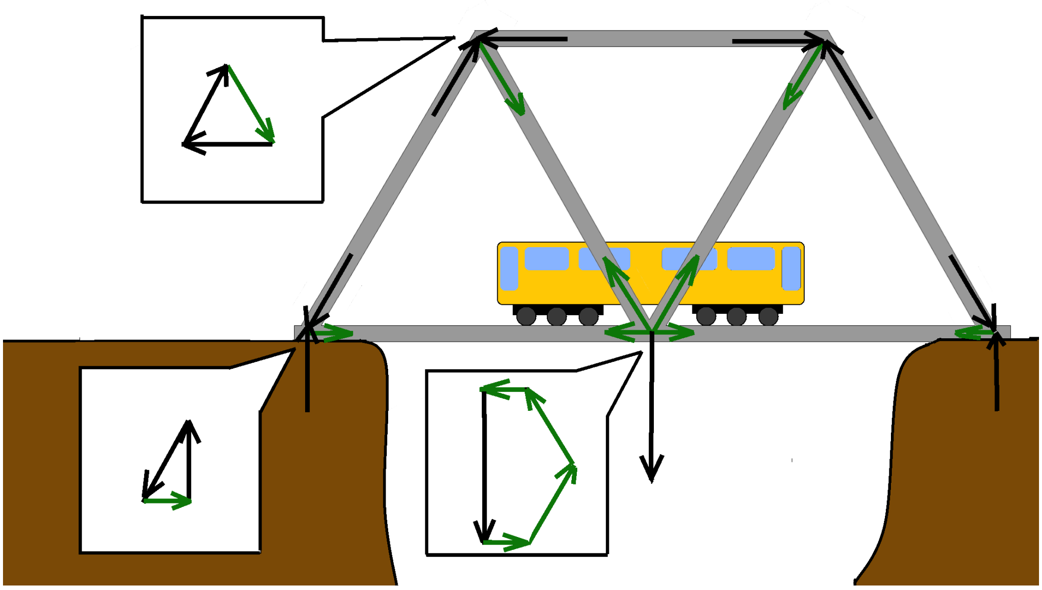


Abb. 3.12: Kraftplan einer Brücke (Abb. ähnlich „Physik plus - Klasse 7|8 Berlin“, Mikelskis et al. 2006, S. 155)

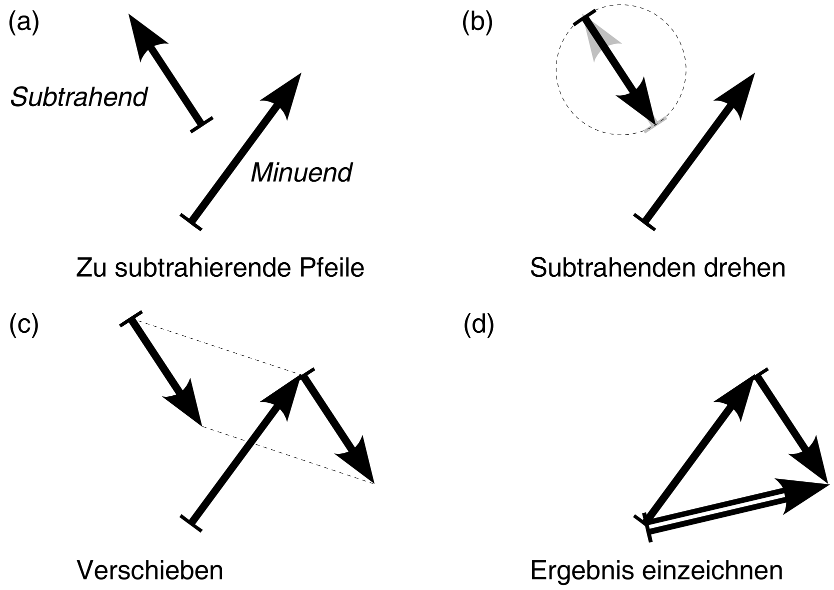


Abb. 3.13: 2. Variante: Subtraktion zweier Vektorpfeile in Anlehnung an das Additionsverfahren mit Polygonzug. Die Prozedur der Addition ist um die Drehung des Subtrahenden ergänzt.

Neben den bisher beschriebenen existieren noch weitere seltenere Pfeilanwendungen. Zur Betrachtung von Stößen wird in universitären Experimentalbüchern der Stoßkreis als geometrische Konstruktionsvorschrift herangezogen, um die Konsequenzen unterschiedlicher Massenverhältnisse beim nichtzentralen Stoß zu betrachten (Niedrig 1992, S. 100; Vogel 1995, S. 34). In den bekannten Schulkonzepten taucht der dabei verwendete Impulspfeil jedoch nicht auf. Es lässt sich vermuten, dass der Impulspfeil im Vergleich zum Geschwindigkeitspfeil bei den Schülerinnen und Schülern zu Schwierigkeiten führen würde. Denn ein Geschwindigkeitspfeil lässt sich aus der Beobachtung eines Objektes heraus bestimmen. Die Länge eines Impulspfeiles muss unter Berücksichtigung der Masse berechnet werden. Zum Verständnis des Impulses mag dies hilfreich sein, Vektorpfeile müssen dazu jedoch bekannt sein.

Im Unterricht zur newtonschen Mechanik verwenden Jung et al. (1977) Pfeile zur Darstellung von Kraftstößen. Letztlich dient der Stoßpfeil jedoch nur der Festlegung der Richtung der Geschwindigkeitsänderung. Wiesner und Wodzinski konnten auf die Stoßpfeile bei der Überarbeitung des Konzepts von Jung verzichten (Wodzinski, 1996, S. 66).

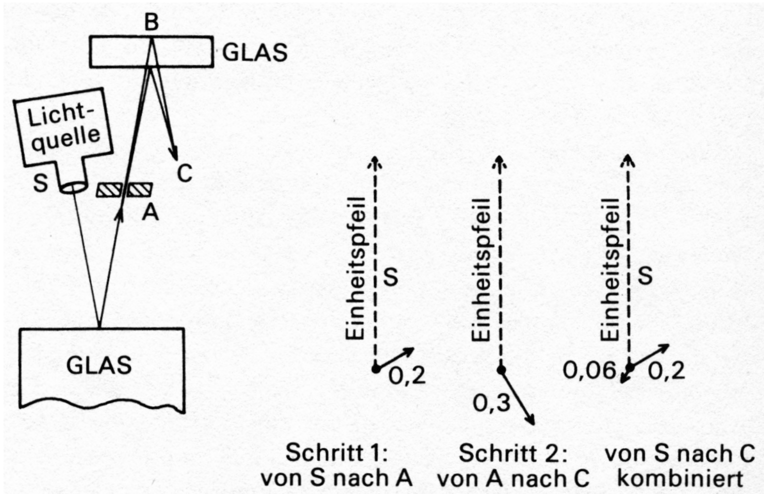


Abb. 3.14: Die Multiplikation zweier Zeiger lässt sich durch Streckungen und Drehungen umsetzen. (Abb. aus Feynman, 2005, S. 73)

3.2.2 Vektorpfeile außerhalb der Mechanik

Im Physikunterricht existieren abgesehen von der Mechanik in der Elektrizitätslehre, der Optik und der Quantenphysik Möglichkeiten, Pfeile in Gestalt sich drehender Zeiger zu nutzen. Diese Themenbereiche zeichnen sich dadurch aus, dass sie sich mathematisch mithilfe der Wellenmechanik modellieren lassen. Es ist für den Schulunterricht interessant, die Amplitude und die Phase einer Welle durch einen Zeiger geometrisch darzustellen und, analog zur bisherigen Ausführungen, auch geometrisch zu bearbeiten. Eine zeichnerische Darstellung einer Welle bietet diese Handlungsoptionen nur sehr eingeschränkt. Zwar ist das Ergebnis einer formelbasierten Rechnung durch eine gezeichnete Wellen visualisierbar, jedoch ist die zeichnerische Umsetzung einer Voraussage oder Berechnung fast unmöglich.

Wie bereits in der Einleitung angeführt, benutzt Feynman einen geometrischen Zeigerformalismus, um die Quantenelektrodynamik zu beschreiben (Feynman 2005; englische Erstausgabe Feynman 1985). Der Pfeil stellt die Amplitude und die Phase der komplexen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion dar. Die Wahrscheinlichkeit wird zeichnerisch als ein Quadrat der Pfeillänge bestimmt. Addition und skalare Multiplikation werden von Feynman als Polygonzug beziehungsweise Streckung umgesetzt. Die Multiplikation zweier Pfeile ist in Abb. 3.14 dargestellt. Mit dieser lassen sich Wahrscheinlichkeiten bestimmen, die aus nacheinander erfolgenden Ereignissen resultieren. Mit diesem Regelwerk für den Umgang mit Pfeilen zur Beschreibung der Wellenfunktionen gelingt es Feynman, von der Reflexion des Lichts über Interferenz und Beugung auch die Wechselwirkungen zwischen Materie und Licht verständlich zu machen.

Aufbauend auf der Idee Feymans entwickelten Erb und Schön ein Unterrichtskonzept für die Optik der Oberstufe (Erb, 1994, 1995). Die Zeiger stellen hier Amplitude und Phase des Lichts dar. Für jeden möglichen Lichtweg existiert ein sich mit der Zeit drehender Zeiger. Mit einer vollständigen Umdrehung des Zeigers legt das Licht eine Wegstrecke der sogenannten Basislänge zurück, die der Wellenlänge entspricht. Da der Wellenbegriff jedoch vollständig ausgespart wird, taucht auch die Wellenlänge nicht auf. Zur Bestimmung der Gesamtintensität sind alle Zeiger der verschiedenen Lichtwege zu addieren. Zur Bestimmung der sich aus unendlich vielen möglichen Lichtwegen ergebenden Intensitäten wird ein Computerprogramm benutzt, das die Pfeile berechnet und visuell präsentiert.

Das Zeigerkonzept zur Optik wurde von Werner (2000) aufgegriffen, um ein Curriculum zur Atomphysik für die elfte Klasse zu entwickeln. Die Zeiger dienen der Beschreibung von Licht und Elektronen, die nach dem Karlsruher Physikkurs als kontinuierlicher Stoff, dem Elektronium, interpretiert werden (Herrmann, 1995, Teil 3). Mit dem Zeigerformalismus können Wechselwirkungen von Licht und Elektronium beschrieben werden.

In einigen Schulbüchern der Oberstufe sind Umsetzungen der beschriebenen Phasenzeiger im Zusammenhang mit der Wechselstromlehre zu finden (Grehn und Krause, 1998; Diehl et al., 2008; Bader, 2006). Neben der Visualisierung von Wellen durch Graphen werden auch Pfeile zur Darstellung und Bestimmung von Stromstärke und Spannung genutzt, siehe Abb. 3.15. Im Zusammenhang mit der Optik sind in Diehl et al. (2008) und Bader (2006) Pfeildarstellungen zu finden.

Es ist an dieser Stelle zu bemerken, dass die durch Zeiger dargestellten Größen im Vergleich zu den Pfeilanwendungen der Mechanik anders geartet sind, da sie sich nicht direkt beobachten lassen. In der Mechanik lassen sich Betrag und Richtung der Größen mit bloßem Auge oder einfachen Messgeräten bestimmen und entsprechend durch Pfeile darstellen. Die Größen der Phasenzeiger sind jedoch nicht durch eine Raumrichtung, sondern eine Zeitabhängigkeit charakterisiert. Im Fall der Optik und Quantenmechanik nimmt die Abstraktion weiter zu, da sich zusätzlich das periodische Verhalten selbst der Beobachtung entzieht. Für eine Einführung der Pfeile empfehlen sich entsprechend die mechanischen Größen, da der vektorielle Charakter bei diesen einleuchtend ist. In komplexeren Themenbereichen könnte dann auf das Wissen über diese Darstellungsform aufgebaut werden.

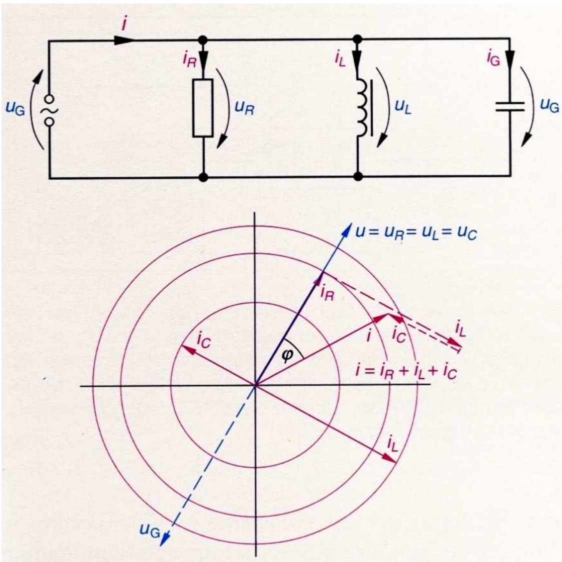


Abb. 3.15: Phasenzeiger in der Wechselstromlehre (Abb. aus „Metzler Physik“, Grehn und Krause 1998 S. 269)

Kapitel 4

Empirische Grundlagen

4.1 Pfeile und Vektoren aus Sicht der Physikdidaktik

Während im vorangegangenen Kapitel Pfeile inhaltlich dargestellt wurden, wird nun eine Übersicht über verschiedene Arbeiten der Physikdidaktik gegeben. Das Spektrum umfasst Unterrichtsvorschläge, Lehrbücher, qualitative und quantitative Studien von der Grundschule bis zum Physikstudium. Am umfangreichsten sind die Arbeiten zur Mechanik, die im Folgenden mit Bezug zur Schule und dann zur Universität vorgestellt werden. Die Unterrichtskonzepte außerhalb der Mechanik sind bereits im Kapitel 3 dargestellt worden.

4.1.1 Zur Mechanik in der Schule

Schon seit über 30 Jahren werden in der Physikdidaktik Konzepte vorgeschlagen, die die Bearbeitung der Mechanik in der Schule mithilfe von Pfeile vorsehen. Verschiedene Autoren sind der Überzeugung, dass eine eindimensionale Behandlung der Mechanik mit der Reduktion auf eine skalare Geschwindigkeit und Kraft nicht sinnvoll ist, weil sich die newtonsche Mechanik nicht aus einer skalaren Betrachtung entwickeln lässt (u. a. Jung et al., 1977; Wodzinski, 1996; Wheeler, 2001; Wilhelm, 2005; Wilhelm et al., 2009). Das Verständnis von Geschwindigkeit im vektoriellen Sinn, vor allem der Geschwindigkeitsänderung mit der darausfolgenden Beschleunigung, ist grundlegend anders als bei eindimensionaler Betrachtung, denn zur Beschreibung einer Bewegung ist nicht nur der Betrag, sondern eben auch die Richtung von Bedeutung. Gerade der mehrdimensionale Aspekt ist entscheidend für das Verständnis der newtonschen Mechanik. Dies gilt zugleich für alle Altersstufen. Auch oder besser insbesonderes ein einführender Mechanikunterricht muss die Bedeutung der Richtungsabhängigkeiten betonen.

> „Ohne vektoriellen Geschwindigkeitsbegriff gibt es keine einheitliche dynamische Beschreibung der Phänomene, d. h. eine Beschreibung aufgrund des Zusammenhangs von Kraft und Bewegung.“ (Jung et al., 1977, S. 10)

Ein umfassendes Unterrichtskonzept, das eine vektorielle Behandlung der Mechanik ausgehend von der Dynamik vorsieht, wurde von Jung et al. (1977) für die 3. bis 6. Klasse entwickelt und evaluiert.[1] Die Geschwindigkeit wird vektoriell in Gestalt von Pfeilen eingeführt. Dabei gibt die Ausrichtung eines Pfeils die Richtung der Bewegung und die Pfeillänge den Geschwindigkeitsbetrag an. Die Addition und Subtraktion der Pfeile wird zeichnerisch nach vorgegebenen Regeln durchgeführt. Aus der Bestimmung der Geschwindigkeitsänderung wird der Stoß als Pfeil mit gleicher Ausrichtung entwickelt. Die Stoßpfeile besitzen zur Unterscheidung einen Schaft in Form einer Spiralfeder. Der Stoß als Ursache für eine instantane Geschwindigkeitsänderung ist von den Autoren im Gegensatz zu einer kontinuierlich wirkenden Kraft ausgewählt worden, um die Quotientenbildung von Geschwindigkeitsänderung und Zeit zu umgehen. Es existieren somit abgesehen von den abrupten Änderungen durch die Stöße ausschließlich geradlinige gleichförmige Bewegungen. Kurvenfahrten muss man sich aus mehreren Stößen zusammengesetzt vorstellen. Die Einführung der Pfeile sehen Jung und Kollegen eng an die physikalische Anwendung gebunden.

> „Dieses Konzept verlangt natürlich eine Bildung von Differenzen zwischen Vektoren. [. . .] Allgemein soll hier nur angemerkt werden, dass diese Begriffe natürlich nicht formal eingeführt werden können. Vielmehr soll gerade eine intuitive Basis im Sinne konkreter Operationen für eine spätere formale Begriffsbildung gefunden werden. Insbesondere sollte die Differenz zweier Geschwindigkeiten (nach dem Stoß minus vor dem Stoß) als eine wirkliche Geschwindigkeit vorstellbar werden.“ (Jung et al., 1977, S. 11-12)

Die Unterrichtseinheit ist in vier Jahrgängen mit jeweils mehreren Schulklassen getestet worden. Mit einem Vor- und einem Nachtest wurden die Leistungsänderung gemessen. Zusätzlich wurden Interviews durchgeführt. Es zeigte sich, dass in allen Altersstufen die Dynamik erfolgreich mit Pfeilen unterrichtet werden konnte. Überraschend ist, dass die Schülerinnen und Schüler der vierten Klasse am meisten von dem Unterricht profitierten, es folgten die

[1] Eine Zusammenfassung der Arbeit von Jung ist in Willer (2003, Kap. 8.6.) zu finden.

3. und dann erst die 5. und 6. Jahrgangsstufe. Es besteht hierzu die Vermutung, dass sich zum einen die skalare Vorstellung von Geschwindigkeit mit dem Alter verfestigt und zum anderen die Motivation für das Fach Physik nachlässt.

In den neben den Tests durchgeführten Interviews zeigten sich verschiedene Probleme wie das Zeichnen von gekrümmten Pfeilen bei Kurvenfahrten. Die Geschwindigkeit wurde scheinbar im Sinne einer andauernden Bewegung und nicht als momentane Größe verstanden. Auch begriffen einige Schülerinnen und Schüler den Geschwindigkeitspfeil nicht als frei verschiebbare Darstellung der Bewegung, sondern positionierten den Geschwindigkeitspfeil immer an den Ort des bewegten Objektes. Andere interpretierten eine Bedeutung in die Lage der Pfeile, zum Beispiel wurden zwei gleich lange Geschwindigkeitspfeile, wovon der eine aber näher an einer Ziellinie eingezeichnet war, unterschiedlichen Geschwindigkeiten zugeordnet. Eine andere problematische Situation war die des Stoßes gegen eine Wand. Gerät ein Geschwindigkeitspfeil während der Konstruktion hinter die Wand kam es sogar bei Lehrenden zu Irritationen (Jung et al., 1977, Kap. C, S. 65). Auch fiel es einigen Schülerinnen und Schülern schwer, Geschwindigkeiten bewegter Bezugsysteme mit Pfeilen auf dem Papier darzustellen, wenngleich ihre Vorstellungen von der Situation durchaus korrekt waren. Zudem zeigte sich, dass das Schema zur Bestimmung der Zusatzgeschwindigkeit teilweise nur abstrakt verinnerlicht wurde. Der Idee, dass der Pfeil der Geschwindigkeitsänderung beobachtbar ist, wenn sich der Beobachter mit der Eingangsgeschwindigkeit des bewegten Objekts unverändert mitbewegt, konnten die Schülerinnen und Schüler nur bedingt folgen:

> „Und wieso ist der dritte Pfeil auch eine Geschwindigkeit? Wessen Geschwindigkeit stellt er dar? Die Schüler, denen die Konstruktion nicht einsichtig geworden war, haben etwas Formales gelernt, daß man nämlich ‚irgendwie' ein Dreieck bilden müsse." (Jung et al., 1977, S. 58)

Insgesamt ziehen Jung und Kollegen eine positive Bilanz und empfehlen, bereits in der Grundschule in die Mechanik vorbereitend einzusteigen, um zu verhindern, dass sich eindimensionale Vorstellungen zur Kraft und Geschwindigkeit verfestigen.

Wiesner und Wodzinski haben das Unterrichtskonzept von Jung et al. aufgegriffen, überarbeitet und für die Mittelstufe angepasst (Wodzinski und Wiesner 1994a,b,c; Wodzinski 1996).[2] Wie zuvor werden Geschwindigkeitspfeile mit Betrag und Richtung zur mehrdimensionalen Beschreibung von

[2] Zusammenfassung ebenfalls in Willer (2003, Kap. 11.7)

Bewegungen eingeführt. Wodzinski betont, dass es für ein newtonsches Verständnis der Mechanik entscheidend ist, dass die Schülerinnen und Schüler die Änderung der vektoriellen Geschwindigkeit erkennen. Dafür seien Pfeile besonders geeignet:

> „Mit der Einführung des Geschwindigkeitspfeils, der die Bewegung zu jedem Zeitpunkt repräsentiert, wird das Erkennen von Bewegungsänderungen erheblich erleichtert, denn es kann auf die ‚sichtbare' Veränderung des Geschwindigkeitspfeils reduziert werden." (Wodzinski, 1996, S. 55)

Folgend wird die Kraft als Einwirkung mit definierter Richtung eingeführt, die für die Änderung einer Bewegung verantwortlich ist. Das Zweite Newton'sche Axiom wird in der Form $\vec{F}\Delta t = m\Delta\vec{v}$ im Unterricht verwendet. Probleme mit dem Begriff der Beschleunigung werden so vermieden. Die Geschwindigkeitsänderung, die sich durch die Subtraktion der Geschwindigkeitspfeile bestimmen lässt, steht im Vordergrund. Die Zeitspanne Δt wird als Einwirkungsdauer der Kraft interpretierbar. Für den Unterricht ist es wesentlich, dass die Richtung der Geschwindigkeitsdifferenz und der Kraft die gleiche ist. Die zeichnerische Berechnung von Geschwindigkeitspfeilen wird aus dem Experiment heraus mithilfe von Stroboskopaufnahmen entwickelt und durch Merkregeln fixiert. Spezielle Fälle, zum Beispiel rechtwinklige Anfangs- und Endgeschwindigkeit und Endgeschwindigkeit Null, die bei den Schülerinnen und Schülern zu Schwierigkeiten führen, werden vorerst zugunsten der Mechanikinhalte zurückgehalten und später thematisiert. Denn die Motivation der Pfeile wird von Wodzinski in der Mechanik gesehen und entsprechend ist diese vorrangig zu entwickeln:

> „Das grundlegende Dilemma bei der Einführung in die Dynamik besteht darin, daß man erst bis zu einem gewissen Grad in die Theorie einsteigen muß, bevor die verschiedenen Zusammenhänge einen Sinn ergeben. Andererseits fällt das Lernen Schülerinnen und Schülern besonders dann schwer, wenn sie den Sinn noch nicht erkennen. Einen Sinn ergeben die Festlegungen wie vektorielle Geschwindigkeit, Zusatzbewegungskonzept usw. letztendlich erst im Zusammenhang mit der Newtonschen Bewegungsgleichung." (Wodzinski, 1996, S. 63-64)

Die newtonsche Bewegungsgleichung wird in vektorieller Form über Proportionalitäten der Betragsänderungen und Richtungsänderungen schrittweise entwickelt und anschließend vielseitig angewendet. Am Ende der Einheit werden eindimensionale Probleme erarbeitet, die Gewichtskraft, Federkraft und Summe von Kräften und Statik bearbeitet.

In verschiedenen Studien untersuchte Wodzinski die Lernprozesse von Schülerinnen und Schüler der Mittelstufe, die nach dem beschriebenen Konzept unterrichtet worden sind. Es wurden dazu Lehrgespräche mit einzelnen Schülerinnen und Schülern analysiert und der Schulunterricht im Klassenverband evaluiert. Insgesamt zieht Wodzinski eine positive Bilanz und sieht die gesetzten Ziele grundsätzlich erreicht. Die Pfeile tragen nach ihrer Ansicht maßgeblich zum Erfolg des Unterrichts bei (Wodzinski, 1996, S. 404). Den Schülerinnen und Schülern erscheint die Darstellung der Bewegung eines Körpers durch einen Pfeil mit Betrag und Richtung als sinnvoll (Wodzinski, 1996, S. 167). Probleme im Umgang mit den Pfeilen konnten unter anderem durch einen Vektortest spezifiziert werden. So gab es Probanden, die zur Subtraktion von Pfeilen die Verschiebung der Pfeile nicht durchführten und den Differenzpfeil direkt zwischen die Pfeilspitzen von Minuend und Subtrahend einzeichneten. Es wurde sogar beobachtet, dass Probanden Pfeile ohne System verschoben und zeichneten. Ein anderes Problem bestand bei der Bestimmung des Stoßpfeiles. Die Probanden zeichneten diesen senkrecht zur anfänglichen Bewegungsrichtung des Körpers und beachteten die Richtung der Geschwindigkeitsänderung nicht. Ebenfalls schwierig war der spezielle Fall der Subtraktion gleichlanger, entgegengesetzter Geschwindigkeitspfeile. Einige Schülerinnen und Schüler bestimmten die Differenz in diesem Fall mit Null. Trotz dieser Beobachtung hebt Wodzinski hervor, dass die Probleme mit der Vektorrechnung mit etwas mehr Zeit bewältigbar sind und das Unterrichtskonzept prinzipiell nicht in Frage stellen (Wodzinski, 1996, S. 223-231).

Auch für die Oberstufe existieren seit langem Unterrichtsvorschläge, die Pfeile in der Mechanik zur mehrdimensionalen Darstellung einsetzen (z. B. Wilhelm und Heuer 1995; Reusch und Heuer 1999; Wilhelm und Heuer 2002a,b,c; Wilhelm 2005, 2008). Die Pfeile werden dabei im Gegensatz zu den bisher präsentierten Ansätzen gleichzeitig mit verschiedenen physikalischen Größen in Verbindung gebracht. Der Ausgangspunkt ist die Beschreibung eines Ortes durch einen Pfeil und nicht die Darstellung der Geschwindigkeit. Über die Differenzbildung zweier Ortspfeile ergibt sich der Verschiebungspfeil, der anschließend zum Geschwindigkeitspfeil entwickelt wird. In gleicher Weise folgt aus dem Pfeil der Geschwindigkeitsänderung der Beschleunigungspfeil. Die Orts- und Geschwindigkeitsänderungen werden dabei zeichnerisch, teilweise mithilfe des Computers bestimmt. Mit der Kraft als Ursache für eine Beschleunigung ergibt sich die vektorielle Beschreibung der Kraft ebenfalls durch einen Pfeil. Da der Unterricht für höhere Klassenstufen ausgelegt ist, stellen dabei Quotienten- und Grenzwertbildung keine Hürden dar, wie es bei den Unterrichtsvorschlägen für die Mittelstufe der Fall war. Außerdem konnte der beschriebene Physikunterricht der Oberstufe darauf aufbauen, dass die Vektoraddition bzw. Subtraktion zu dieser Zeit Inhalt des betreffenden bayrischen Lehrplans für Mathematik waren.

Verschiedene Studien sind zum Mechanikunterricht der Oberstufe durchgeführt worden. Dabei ist vorwiegend in qualitativer Weise ohne die Verwendung von Formeln mit den Pfeilen gearbeitet worden. Es konnte speziell gezeigt werden, dass sich mit einem herkömmlichen Unterricht, der sich auf eindimensionale Betrachtungen beschränkt, kein angemessenes Verständnis von Geschwindigkeit, Beschleunigung und Kraft im newtonschen Sinne erreichen lässt (Wilhelm 2005, Kap. 6, Wilhelm 2008). Schwächen zeigen die Schülerinnen und Schüler nicht nur bei Aufgaben zu mehrdimensionalen Bewegungen wie Kreisbewegungen, sondern auch bei eindimensionalen Aufgaben mit Richtungswechsel. Nach einer Untersuchung mit mehreren Klassen der elften Jahrgangsstufe, die einen auf Pfeilen basierenden Unterricht zur Grundlage hatte, zieht Wilhelm eine positive Bilanz (Wilhelm, 2005, Kap. 6). Durch Lehrerinterviews und Tests konnte er zeigen, dass der Umgang mit Pfeilen von den Schülerinnen und Schülern erlernt wurde und entsprechend zweidimensionale Probleme der Mechanik erfolgreich gelöst wurden. So konnten die Schülerinnen und Schüler zum überwiegenden Teil einen Beschleunigungsvektor konstruieren und in verschiedenen Aufgabenszenarien zeichnerisch bestimmen. Außerdem waren im Vergleich zu traditionell unterrichteten Klassen keine nennenswerten Defizite im Deuten von eindimensionalen Aufgabenstellungen zu verzeichnen. Insbesondere spricht Wilhelm von einem besseren Verständnis des Beschleunigungsbegriffs:

> „Die Einführung kinematischer Größen anhand zweidimensionalen Bewegungen, die nur mit ikonischen Repräsentationen in Form von Vektorpfeilen sinnvoll ist (geeignete Elementarisierung), führt zu einem physikalischeren Verständnis des Beschleunigungsbegriffes und vermeidet Fehlvorstellungen durch eine ungeeignete Reduktion auf den Spezialfall eindimensionaler Bewegungen. Mehr Schüler konzeptualisieren Beschleunigung wie in der Physik als gerichtete Größe anstelle einer Größe, die die Änderung des Geschwindigkeitsbetrages angibt und allenfalls tangentiale Richtung haben kann.“ (Wilhelm, 2005, S. 259)

Das erfolgreiche Unterrichtskonzept wurde von Schüller und Wilhelm unter Berücksichtigung der Arbeiten von Jung, Wiesner und Wodzinski an die 7. Klassenstufe angepasst und erfolgreich erprobt (Wilhelm, 2008; Schüller und Wilhelm, 2008). Aktuell ist von Hopf, Wiesner et al. eine Vergleichsstudie gestartet worden, die die Wirksamkeit des Mechanikunterrichts zur Dynamik mit Pfeilen für die 7. Klassenstufe belegen soll (Hopf et al., 2009;

Wilhelm et al., 2009; Tobias et al., 2009). Vor der eigentlichen Studie wurde das dreieinhalb-monatige Unterrichtskonzept in 19 Schulklassen erprobt. Auf Grundlage dieser Erprobung konnten erste positive Eindrücke gewonnen werden (Wilhelm et al., 2009). So erreichten die Erprobungsgruppen ein besseres fachliches Verständnis und entwickelten ein höheres Interesse am Physikunterricht als die herkömmlich unterrichteten Klassen.

Die sinnvolle Nutzung von Pfeilen ist nicht zwingend an eine Einführung der Mechanik über die Dynamik geknüpft.[3] Auch der Einstieg über die Statik schafft Gelegenheit, Pfeile in diesem Fall als Kraftpfeile einzuführen, wie es im Unterrichtsvorschlag des Projekts „Physik im Kontext“ erfolgreich umgesetzt wurde und in aktuellen Schulbüchern zu finden ist (Boczianowski und Schön 2006a,b,c; Boczianowski 2007; Mikelskis et al. 2006; Bader und Oberholz 2006). Innerhalb dieser Unterrichtsabläufe zur Mittelstufe werden ausschließlich Kräfte als Pfeile dargestellt. Ein durchgängiges Pfeilkonzept für die Mechanik ist nicht zu finden. In einigen Fällen lässt sich die Addition von Geschwindigkeitspfeilen finden. (Diehl et al., 2008; Bader und Dorn, 1998). In Schulbüchern der Oberstufe sind auch Pfeildarstellungen von Geschwindigkeiten zu finden (Diehl et al. 2008; Bader und Dorn 1998). Es überwogen aber die Darstellungen durch Graphen.

Zu den zuvor beschriebenen weitestgehend durchgängigen Unterrichtskonzepten werden nun spezielle Aspekte der aktuellen Diskussion zu Pfeilen im Mechanikunterricht vorgestellt. So sind zwei explorative Studien von Aguirre bemerkenswert, die sich vektoriellen Präkonzepten zu den Größen Ort, Verschiebung und Geschwindigkeit von kanadischen Zehntklässlern vor dem Physikunterricht widmen (Aguirre und Erickson, 1984; Aguirre, 1988). Es konnte gezeigt werden, dass bei vielen Schülerinnen und Schülern Vorstellungen zur Beschreibung eines Ortes oder einer Verschiebung durch Richtungs- und Betragsangabe sowie rudimentäre Vorstellungen zur Addition von Verschiebungen und auch zur Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom Beobachter existieren. Andererseits sind auch Präkonzepte auffindbar, nach denen die Geschwindigkeit und auch die Bahnkurve fest mit dem sich bewegenden Körper verbunden sind und von der Bewegung des Beobachters abhängig sind. Die veränderte Beobachtung durch eine eigene Bewegung wird teilweise eher im Sinn einer optischen Täuschung interpretiert und nicht als darstellbare Geschwindigkeit. Im Zusammenhang mit orthogonalen Bewegungkomponeten, wie sie zum Beispiel bei der Betrachtung des Wurfes üblich sind, existieren vermehrt Präkonzepte, nach denen diese abhängig sind und sich gegenseitig beeinflussen können, was die Argumentationsgrundlage für eine

[3]Einen Überblick über die Diskussion zum Einstieg in die Mechanik gibt Willer (2003, 11.7).

orthogonale Komponentenzerlegung untergräbt. Überraschenderweise konnten ähnliche Vorstellungen auch bei fast der Hälfte eines kanadischen Hochschulkurses zur Mechanik nach dem Unterricht gefunden werden (Aguirre 1989).

Mit Blick auf die beschriebenen Schwierigkeiten ist es nachvollziehbar, dass andere Autoren einen Verzicht auf die Komponentenzerlegung empfehlen (Kondratyev und Sperry 1994; Wheeler 1998, 2001; Wheeler und Charoenkul 2002; Newburgh und Strasburger 2002; Theilmann 2006, Kap. 3). Nach Ansicht der Autoren ist die physikalische Größe durch den Pfeil als Ganzes klarer darstellbar. Eine Aufteilung der Bewegung nach meist horizontaler und vertikaler Richtung, was zu Verständnisproblemen führen kann, wird vermieden. So existiert ohne Komponentenzerlegung zu einer Bewegung eines Körper zu einem Zeitpunkt auch nur eine Geschwindigkeit oder Beschleunigung in Form eines einzigen Pfeils. Ein weiterer Vorteil ist, dass die Nutzung von Pfeilen nicht an die Lage und Ausrichtung eines Koordinatensystem gebunden ist. Die Suche nach einem günstigen Nullpunkt zur Vermeidung von negativen Geschwindigkeiten oder von Vorzeichenwechseln entfällt. Es ist lediglich ein Maßstab zu vermerken, um die Länge eines Pfeils mit der entsprechenden Größe in Beziehung zu setzen.[4]

Ein weiterer Vorteil der Pfeildarstellung ohne Komponentenzerlegung ist außerdem, dass die Resultierende einer Pfeilkonstruktion sofort qualitativ sichtbar wird (Wheeler 2001; Wilhelm und Heuer 2002a). Die Interpretation des Ergebnisses ist in Form eines Pfeiles kompakt und klar und muss nicht mit einem Blick auf die Lage des Koordinatensystems interpretiert werden, wie im Fall von negativen Geschwindigkeiten mit gleichzeitig positiver Beschleunigung. Eine trigonometrische Berechnung lässt sich an die zeichnerische Konstruktion anschließen, wenn die exakte Pfeillänge von Interesse ist (Wheeler, 2001). Im Vergleich zu einer arithmetischen Beschreibung mit formelbasiertem Vorgehen sind die Aufgabenstellung und die Lösung eines Problems für die Schülerinnen und Schüler durch Pfeile leichter zu artikulieren und die zugrunde liegende Physik damit vermutlich klarer darstellbar (Newburgh und Strasburger, 2002).

4.1.2 Zur Mechanik in der Universität

Neben dem Unterricht in der Schule lassen sich Pfeile auch in der universitären Lehre gewinnbringend einsetzen. So findet sich im Lehrbuch zur Experimentalphysik vom amerikanischen Autor Giancoli (2006) eine konsistente Um-

[4]Die Problematik der Lage des Nullpunkts eines Koordinatensystems diskutiert Herrmann (2007).

setzung des Pfeileformalismus. Farblich werden die jeweiligen physikalischen Größen differenziert, Resultierende durch eine Umrahmung herausgehoben und im Fall einer Komponentenzerlegung die sich ergebenden Pfeile gestrichelt gezeichnet. Vektoraddition und Skalarmultiplikation werden ebenso wie die Bestimmung der Beschleunigung aus Geschwindigkeitspfeilen zeichnerisch detailiert besprochen. Szenarien der Mechanik werden nahezu durchgängig anhand von Pfeilen erläutert.

Umfangreiche Untersuchungen sind in den USA durchgeführt worden, die die Fähigkeiten von Studierenden bezüglich der Vektorrechnung in der Anfangszeit ihres Studiums untersuchten. So konnte in einer Feldstudie mit zweitausend Probanden mit einem Kurztest gezeigt werden, dass mehr als ein Viertel aus grundlagenorientierten Kursen (calculus-based), bzw. die Hälfe aus anwendungsorientieren Kursen (algebra-based) nach der Physiklehrveranstaltung, in der die Vektorrechnung vielfach angewandt wurde, zwei Pfeile nicht geometrisch addieren konnten (Nguyen und Meltzer, 2003). Die geometrische Interpretation von Vektoren wird offensichtlich gegenüber der arithmetischen Darstellung in der Lehrveranstaltung extrem vernachlässigt.

In einer weiteren Feldstudie wurden die Leistungen von vier verschiedenen Studentengruppen unterschiedlicher Universitäten nach einem vektorbasierten bzw. einem traditionellen Unterricht gegenübergestellt (Kanim et al., 2004). Der Test umfasste Aufgaben zur abstrakten Addition und Subtraktion von Pfeilen, zur Vektornatur von Geschwindigkeit und Kraft und zum Zweiten Newton'schen Axiom. Es zeigt sich, dass die Studierenden des traditionellen Unterrichts kaum über Fähigkeiten in diesen Bereichen verfügten. Nach dem überarbeiteten Unterricht erreichten die Studierenden bessere Leistungen im abstrakten Umgang mit Vektoren und benutzen Vektoren auch von sich aus für die Argumentation in physikalischen Aufgabenstellungen. Die Verbesserungen im Zusammenhang mit dem Zweiten Newton'schen Axiom sind allerdings nur moderat. Die Autoren hoffen, dem durch verstärktes Üben begegnen zu können.

Im Jahr 2005 ist eine groß angelegte experimentelle Feldstudie mit über zwanzigtausend Probanden in den USA durchgeführt worden (Shaffer und McDermott, 2005). Die Leistungen der Studierenden verschiedener Universitäten wurden nach einer kurzen Unterrichtseinheit zur Mechanik, in der physikalische Größen mit Pfeilen qualitativ darstellt wurden, durch Vor- und Nachtest evaluiert. Es zeigt sich, dass nach dem Unterricht der mathematisch-abstrakte Umgang mit Vektoren beherrscht wird, jedoch eine Anwendung der Pfeile im physikalischen Kontext schwierig ist. So fiel es den Studierenden schwerer, einen Beschleunigungspfeil aus zwei Geschwindigkeitspfeilen zu konstruieren, als zwei abstrakte Pfeile zu subtrahieren. Das Übertragen des physikalischen Problems in den mathematischen Formalismus stellte die

Hürde dar und weniger das abstrakte Regelwerk der Vektorrechnung an sich.

In Deutschland sind von Wilhelm mehrere hundert Studierende aus physikalisch orientierten Studiengängen untersucht worden (Wilhelm, 2007). Der durchgeführte Eingangstest zeigt, dass die Leistungen der deutschen Studienanfänger im mathematisch-abstrakten Umgang mit Pfeilen besser sind als die der amerikanischen Anfänger. Teilweise gilt dies sogar für den Vergleich zu den amerikanischen Zweitsemesterstudierenden. Die Addition wird von nahezu allen geometrisch wie arithmetisch beherrscht. Das Skalarprodukt wird von weniger als die Hälfte der Studierenden beherrscht. Das Vektorprodukt ist so gut wie nicht bekannt. Trotz dieser teilweise weitreichenden Kenntnisse ist dennoch festzuhalten, dass ungefähr ein Fünftel der Studierenden die Begriffe Betrag und Richtung im Zusammenhang mit Pfeilen nicht korrekt nutzen kann.

Weniger positiv sind die Ergebnisse, wenn die Aufgaben auf die Nutzung von Pfeilen in der Kinematik und Dynamik zur Darstellung und zeichnerischen Bestimmung der Größen abzielen. Aufgabenstellungen zu eindimensionalen Bewegungen wurden von den Studierenden fast ausnahmslos korrekt gelöst, solange es keine Richtungsänderungen gibt. Eine Aufgabe zum senkrechten Wurf löste nur ungefähr ein Drittel der Studierenden. Bei zweidimensionalen Bewegungen, insbesondere kurvenförmigen Bahnen mit nichtkonstantem Geschwindigkeitsbetrag sinkt die Lösungswahrscheinlichkeit auf unter ein Fünftel. Teilweise wurden die Items von den deutschen Studienanfängern schlechter beantwortet als von den amerikanischen Studienanfängern. Ähnlich ist das Bild bezüglich der Fragen zur Dynamik, die nur die Hälfte der deutschen Studierenden bewältigten. Wilhelm zieht das Resümee, dass auf einen mathematischen Brückenkurs zum Einstieg ins Studium mit Inhalten zur Vektorrechnung nicht verzichtet werden kann.

4.1.3 Zusammenfassung

Das Thema der Pfeile ist in der Didaktik der Physik vielseitig bearbeitet worden. Es existieren detaillierte und umfangreich evaluierte Unterrichtvorschläge für die Mechanik, in denen Pfeile eingesetzt werden, um Orts- und Bewegungsgrößen und Kraft darzustellen. Das Pfeilsymbol ist auf der einen Seite so einfach zu begreifen, dass es in der Grundschule nutzbar ist und auf der anderen Seite so ergiebig und mächtig, dass es auch an der Universität zu tieferem Verständnis beitragen kann. Durch die Kompaktheit und Übersichtlichkeit des Pfeilsymbols ist es möglich, grundlegende physikalische Aspekte darzustellen, ohne tief in einen mathematischen Formalismus einzusteigen, bzw. einen solchen Formalismus vorzubereiten, zu visualisieren und verständlich zu machen. Sicherlich bleiben die Themen der Physik auch mit der Pfeildarstellung schwierig, jedoch sind die bisherigen Erfahrungen grundsätzlich positiv und Verständnisbarrieren, die durch Pfeile verursacht werden, nicht sichtbar geworden. Vielmehr zeigt sich, dass Pfeile in der Physik innerhalb und außerhalb der Mechanik vielfältig, flexibel und sinnvoll verwendbar sind.

Alle vorgestellten Konzepte haben für sich Pfeile eingeführt und aus dem entsprechenden physikalischen Kontext heraus motiviert. Ein Wissen um diese Darstellungsform konnte nicht vorausgesetzt werden. Das bedeutet jedoch, dass vom Lehrenden zweierlei zu leisten ist. Zum einen ist die Handhabung der Pfeile, also die geometrische Vektorrechnung zu motivieren und zu vermitteln und zum anderen sind die Themen selbst, wie die Prinzipien der newtonschen Mechanik oder des Lichtwegekonzepts zu begründen und verständlich zu machen. Es liegt nahe, Pfeile als mathematischen Formalismus themenübergreifend und vernetzend im Schulunterricht nutzen zu wollen, ähnlich wie auch andere Darstellungsformen wie Graphen oder weitergehend auch die Darstellung durch Formelsymbole nicht an einen physikalischen Themenbereich gebunden sind.

4.2 Pfeile und Vektoren aus Sicht der Mathematikdidaktik

Pfeile, Zeiger und Vektoren sind nicht nur ein Thema des Physikunterrichts, sondern auch des Mathematikunterrichts. Die Sichtweisen sind jedoch verschieden. Geht es im Physikunterricht um eine bessere Vermittlung physikalischer Konzepte durch Pfeile, ist es das Bestreben des Mathematikunterrichtes, das abstrakte Konstrukt der Vektorrechnung zu vermitteln. Es wird im Folgenden ausgeführt werden, welche Arten des Zugangs zur Vektorrechnung existieren, welche Schwierigkeiten existieren und warum eine Einführung über die Pfeile im Kontext der Physik ein sinnvoller Weg ist.

4.2.1 Einführungen in die Vektorrechnung

Eine mathematisch präzise Definition des Vektors bzw. Vektorraums fällt selbst in der Hochschule nicht leicht. Einen Eindruck der Definition des Vektorraums gibt eine Zusammenfassung von Beutelspacher.[5]

> „In einem Vektorraum sind zwei Strukturen, die des Körpers K und die der Menge V der Vektoren, miteinander verknüpft. In bei-

[5] Vollständige Definitionen finden sich zum Beispiel in den Hochschulbüchern zur Mathematik von Wüst (1995) oder Beutelspacher (2003).

> den Strukturen kann man addieren; [...]. Ebenso gibt es zwei Nullelemente: das Nullelement von K und den Nullvektor. Schließlich gibt es auch zwei Multiplikationen: die von K und die, die ein Skalar mit einem Vektor verknüpft.“ (Beutelspacher, 2003, S. 49)

Entsprechend dieser Definition existieren „Vektorräume in Hülle und Fülle und für jeden Geschmack“ (Beutelspacher, 2003, S. 54). In einer kleinen, qualitativen Studie konnte Fischer zeigen, dass Studierende auch nach entsprechenden Lehrveranstaltungen kaum über eine entsprechend allgemeine Auffassung von Vektoren verfügen. Vielmehr überwiegt eine geometrische Vorstellung (Fischer, 2003). Wüst (1995) greift diese vereinfachte Vorstellung von einem Vektor bewusst auf und beginnt in seinem universitären Lehrbuch zur höheren Mathematik das Kapitel der Lineare Algebra mit Pfeilen.

> „Der Begriff ‚Vektor‘ oder auch ‚gerichtete Größe‘ hat schon viel Verwirrung gestiftet. Es sollen im Folgenden aus verbreiteten, mehr bildhaften Beschreibungen die Eigenschaften herausgelöst werden, die zur Definition von linearen Räumen führen, um dann schließlich eine klare und äußerst simple Antwort auf die Frage zu finden, was denn ‚Vektoren‘ sind.“ (Wüst, 1995, S. 343)

Aufgrund der angedeuteten Schwierigkeit und gleichzeitig der großen Bedeutung des Vektorbegriffs beschäftigt sich die fachdidaktische Forschung der Mathematik mit der Frage, wie eine Einführung des Vektorbegriffs in der Schule vorgenommen werden kann. Grundlegend für die Überlegungen ist, dass es ist nicht das Ziel des Schulunterrichts sein kann, den vollständigen Vektorbegriff zu vermitteln:

> „In der Schulmathematik steht nicht der formal-axiomatisch eingeführte Vektorraum im Mittelpunkt, sondern einige seiner konkret eingeführten Modelle. Das sind in erster Linie die zwei- und dreidimensionalen geometrischen Vektoren und die Spaltenvektoren des $\mathbb{R}^2$ und des $\mathbb{R}^3$. Diese Modelle dienen vorrangig der Beschreibung und Behandlung von Sachverhalten im konkreten Anschauungsraum. [...] Mit dem Anschauungsraum als gedankliches Fundament entfällt die Notwendigkeit, einen Punktraum formal-axiomatisch zu kennzeichnen. Zusätzlich spielt der $\mathbb{R}^n$ als Mathematisierungsmuster in einem anwendungsorientierten Mathematikunterricht eine wichtige Rolle.“ (Tietze et al., 2000, S. 9)

Es stellt sich die Frage, wie sich in die Vektorrechnung sinnvoll einsteigen lässt und mit welchem Zugang sich welche Möglichkeiten aber auch Einschränkungen verbinden (z. B. Wittmann 2003; Tietze et al. 2000; Bender 1994; Bürger et al. 1980). Tietze stellt fest, dass grundsätzlich eine arithmetische oder eine geometrische Einführung möglich sind. Die arithmetische Einführung leitet sich über ein Koordinatensystem komponentenweise ab. Es lässt sich als „Verallgemeinerung des Rechnens mit Zahlen“ (Tietze et al., 2000, S. 160) motivieren. Mit Gleichungen von Zahlenpaaren bzw. -tupeln lassen sich Geraden und Ebenen beschreiben. Für die Einführung eines geometrischen Vektors existieren vier Möglichkeiten: der Vektor als Punkt, als Zeiger, als Pfeilklasse und als Translation. Die Einführung des Vektors als Punkt begründet sich aus dem vorangegangenen Geometrieunterricht, in dem Punkte in einem Koordinatensystem durch ein Zahlenpaar dargestellt werden. Die Skalarmultiplikation leitet sich aus den Komponenten ab. Die Addition von Punkten lässt sich jedoch nicht intuitiv verständlich machen. Die Einführung über Zeiger entspricht nach Tietze dem typischen Zugang des Physikunterrichts. Alle Zeiger besitzen ihren gemeinsamen Fußpunkt im Koordinatenursprung. Die Addition erfolgt in diesem Sinn über die Parallelogramm-Konstruktion. Die Skalarmultiplikation ist als Streckung eines Pfeils leicht nachvollziehbar, jedoch wird eine Geradengleichung durch die Fixierung der Zeiger am Ursprung unanschaulich. Im Pfeilklassenmodell sind die Pfeile frei verschiebbar. Durch das Verschieben der Pfeile zu einem Polygonzug lassen sich diese addieren, die Skalarmultiplikation entspricht der Streckung eines Pfeils. Problematisch ist der Begriff der Äquivalenzklasse, denn unter einem Vektor ist nicht ein einziger, sondern die Gruppe aller gleich ausgerichteter, gleich langer Pfeile zu verstehen. Entsprechend ist das Ergebnis einer Operation unabhängig von der Wahl der repräsentierenden Pfeile, also unabhängig vom Ort des darstellenden Pfeiles. Im vierten geometrischen Einstieg wird ein Vektor als Translation, also als Abbildung verstanden. Die Addition entspricht dem Nacheinanderausführen von Verschiebungen. Die in der Mathematik übliche Notation für die Verschiebung ist jedoch eine andere, an die sich nicht anknüpfen lässt. Es liegt nahe, dieses Modell mit dem Pfeilklassenmodell zu kombinieren. So ließe sich außerdem die Addition im Pfeilklassenmodell begründen.[6] Im Folgenden werden aktuelle Studien vorgestellt, die sich der Einführung der Vektorrechnung auch mit dem Ziel der Vernetzung zum Physikunterricht widmen.

[6]Die im Kapitel 7 vorgestellten Unterrichtseinheiten meiner eigenen Studie sind entsprechend konzipiert: Geschwindigkeits- und Kraftvektoren werden mit frei verschiebbaren Pfeilen identifiziert, also entsprechend dem Pfeilklassenmodell eingeführt.

4.2.2 Wahrnehmung von Pfeilen in der Vektorrechnung

Wittmann (2000) untersucht in einer Studie die Vorstellungen zu Vektoren von vier Grund- und zwei Leistungskursen der 13. Klassen. Die Einführung in die Vektorrechnung lag für alle Klassen schon längere Zeit zurück und erfolgte mit verschiedenen Schulbüchern, aber es geschah in allen Fällen geometrisch. Es zeigte sich, dass die meisten Schülerinnen und Schüler auf die Frage nach einer Definition eines Vektors, keine allgemeine Antwort gaben, sondern Eigenschaften und Anwendungen nannten. In einer weiteren Untersuchung in einem Grundkurs der 13. Klasse konnte Wittmann (2000) zeigen, dass trotz einer arithmetischen Einführung, Vektoren von den Schülerinnen und Schülern geometrisch verstanden wurden. Am häufigsten wurden sie mit Pfeilen, weniger mit Punkten identifiziert. Wittmann begründet dies mit der Lernbiografie der Schülerinnen und Schüler, denn die geometrischen Objekte wie Pfeile und Punkte tauchen früher auf, während n-Tupel der Beschreibung dieser Objekte dienen. Beide Befunde zeigen, dass das Symbol des Pfeils im Zusammenhang mit der Vektorrechnung verstärkt wahrgenommen wird, und legen nahe, Pfeile im Unterricht verstärkt zu benutzen. Durch das Hervorheben der Darstellung der Vektoren als Pfeile stellt sich die Frage, ob der Vektorbegriff dadurch nicht zu sehr reduziert wird und letztendlich den Schülerinnen und Schülern sinnvolles Wissen zum übergeordneten Vektorbegriff vorenthalten wird. Dem entgegnet Wittmann:

> „Für das Lösen geometrischer Probleme genügt die intuitive Vorstellung eines Vektors als frei verschiebbarer Pfeil durchaus. Situationen, in denen man mit Äquivalenzklassen und Repräsentanten argumentieren müßte (z. B. Wohldefiniertheitsprobleme bei Beweisen), treten selbst in Leistungskursen nicht auf." (Wittmann, 2000, S. 136)

Bürger et al. (1980) äußern sich zur Gleichsetzung von Vektoren mit ihren Repräsentationen in gleicher Weise:

> „Wir halten diese sprachliche Vereinfachung für berechtigt und für keine Verfälschung der Situation. Es ist auch im täglichen Leben üblich, Gegenstände mit ihren Darstellungen zu identifizieren. Man zeigt auf ein Bild und sagt: ‚Das ist Gauß'. Oder man weist auf eine Landkarte und sagt: ‚Hier liegt Wien.'"(S. 179)

Die strikte Differenzierung zwischen einem Vektor und seinen Repräsentanten lässt sich in der Schule dementsprechend ohne Verlust einsparen, ohne das Thema der Vektoren zu reduzieren oder auf Inhalte im späteren Unterricht zu verzichten.

4.2.3 Anwendungsorientierte Einführung

Entsprechend den oben dargestellen Ergebnissen aus der Oberstufe entwickelte Wittmann für die 8. Klasse eine Unterrichtseinheit zur Vektorrechnung, in der die Anwendung von Pfeilen als Darstellung einer physikalischen Größe im Zentrum steht. Er begründet dies folgendermaßen:

> „Für die Sekundarstufe I lassen sich zwar sinnvolle inhaltliche Anknüpfungspunkte zur vorausgegangenen Vierecksgeometrie finden, seine wesentliche Legitimation gewinnt der Vektorbegriff aber vor allem aus dem fächerübergreifenden Bezug zum Physikunterricht. Dort sind die Vektoreigenschaften von Kräften, insbesondere die graphische Addition und Komponentenzerlegung, ein wichtiger Unterrichtsinhalt. Wenn also in der 8. Klasse eine Unterrichtsequenz zum Vektorbegriff durchgeführt wird, so muss diese Verbindung zum Fach Physik gesucht und betont werden.“ (Wittmann, 1996, S. 97)

Der anwendungsbetonte Zugang ist jedoch nicht frei von Problemen. Genin et al. (1987, S. 100) stellten in einer Untersuchung mit zwei französischen Schulklassen auf dem Niveau der 11. Klasse eines Gymnasiums fest, dass bei der Nutzung von Pfeilen Probleme bei der physikalischen Anwendung bestehen. Den betreffenden Schülerinnen und Schülern fiel es schwerer zwei Kraft- beziehungsweise Geschwindigkeitspfeile auf Gleichheit ihrer Längen und Ausrichtungen zu prüfen als dies bei Pfeilen ohne physikalische Anwendung zu tun. In ähnlicher Weise zeigt die Untersuchung, dass die Addition von abstrakten Pfeilen von den Schülerinnen und Schülern leichter bewältigt wurde als die Addition von Pfeilen mit physikalischer Anwendung. Dies ähnelt den Ergebnissen der Studie mit amerikanischen Studierenden, siehe S. 39. Das lässt jedoch nicht den Schluss zu, dass eine abstrakte, anwendungsfreie Einführung von Pfeilen der richtige Weg ist. Abgesehen von der oben genannten Motivation der Pfeile aus ihrer Anwendung heraus, erscheint es vielmehr sinnvoll zu sein, die Anwendung der Pfeile von Anfang an Schritt für Schritt zu üben, da dies offensichtlich nicht beiläufig zu erlernen ist.

Die von Wittmann entwickelte, anwendungsbezogene Einführung von Vektoren wurde in zwei Studien in zwei achten Klassen eines bayrischen Gymnasiums erprobt (2003, Kap. 2.2; 1996). Pfeile waren den Schülerinnen und Schülern aus dem Physikunterricht in Form von Kraftpfeilen bekannt. Die Erfahrungen mit Pfeilen aus dem Geometrieunterricht werden von Wittmann als unbedeutend gewertet. Das von den Schülerinnen und Schülern entwickelte Vektorkonzept, resultierend aus den genannten Erfahrungen und der vierstündigen Unterrichtseinheit, wird explorativ evaluiert.

Als erste physikalische Anwendung wählte Wittmann die Geschwindigkeit. Er hofft dabei an Alltagserfahrung der Schülerinnen und Schüler anknüpfen zu können, insbesondere in Bezug auf die Superposition von Geschwindigkeiten. Es wird von Wittmann betont, dass im realisierten Unterrichtskonzept Vektoren grundsätzlich als geometrische Objekte eingeführt werden. In einem zweiten Schritt werden sie arithmetisiert, bleiben jedoch immer mit dem geometrischen Kontext verbunden. In der ersten Stunde werden Pfeile im Kontext einer Kursberechnung eines Bootes auf einem Fluss als Geschwindigkeitspfeile eingeführt. Über die in einer festen Zeitspanne zurückgelegte Strecke wird ein Geschwindigkeitspfeil konstruiert und so die Addition von Geschwindigkeitspfeilen begründet. Wittmann hebt hervor, dass die Addition von Pfeilen auf diese Weise nicht formal-mathematisch eingeführt, sondern aus der Physik heraus entwickelt wird. Auch andere vektorielle Größen der Physik wie die Kraft werden im Unterricht besprochen und skalaren Größen wie Volumen, Zeit und Temperatur gegenübergestellt. In der zweiten Unterrichtsstunde werden Pfeile abstrakt behandelt. Kommutativgesetz und Assoziativgesetz der Addition sowie die Skalarmultiplikation und das Distributivgesetz werden bearbeitet. In der dritten Unterrichtsstunde werden Vektoren arithmetisiert, indem am Kontext einer Schneidemaschine das frei wählbare Koordinatensystem und die Spaltennotation eingeführt werden. Die Pfeile werden in diesem Zusammenhang als Verschiebungspfeile angewandt. In der letzten Unterrichtsstunde werden von den Schülerinnen und Schülern Aufgaben der analytischen Geometrie behandelt, diese sind zum Beispiel die Berechnung von Mittelpunkten von Vielecken bzw. Geraden und die Konstruktion geometrischer Figuren.

Wittmanns Unterrichtseindrücke sind positiv. Nur in wenigen Situationen neigten die Schülerinnen und Schüler zur Übergeneralisierung in der Art, dass zum Beispiel ein Bruchstrich in die Spaltennotation gezogen wurde oder diese mit der Zeilennotation von Punkten vermischt wird. Teilweise konnten die Schülerinnen und Schüler nicht zwischen Vektoren und rationalen Zahlen beim Beweisen der Gesetze zur Addition differenzieren. Außerdem kam es im Zusammenhang mit dem Kommutativ- und Assoziativgesetz zu Verständnisproblemen. Die Evaluation umfasste außerdem einen Test, in dem rechnerische Aufgaben zu lösen waren, und einen offenen Aufsatz, in dem einem allgemeinen Publikum der Begriff Vektor zu erklären war. Die Auswertung des Aufsatzes zeigte, dass die Schülerinnen und Schüler immer eine geometrische und keine arithmetische Definition eines Vektors gaben, obwohl beide Formen Unterrichtsgegenstand waren. Vektoren wurden im Wesentlichen mit Pfeilen identifiziert. Die Addition von Pfeilen wurde immer geometrisch und nicht über die auch unterrichtete, arithmetische Darstellung erklärt (Wittmann, 1996, S. 113). Sehr selten wird der Vektorbegriff abstrakt ohne physikalische

Anwendung erklärt. Meistens wurden ein oder zwei Anwendungen genannt. Einige Schülerinnen und Schüler beschrieben nicht nur im Unterricht behandelte Anwendungen, sondern entwickeln noch weitere wie die Beschreibung von Positionen. Insgesamt kann Wittmann zwei Kategorien von Erklärungsweisen ausmachen:

> „Schüler, die nur eine einzige Anwendung beschreiben, binden ihre Pfeilvorstellung und damit auch den Terminus 'Vektor' sehr eng an diese. Der Vektorbegriff wird nicht nur lokal, sondern auch global mit einer Darstellungsform identifiziert und auf einen einzigen Aspekt, etwa seine Funktion als Kraftpfeil reduziert. [...] Schüler, die mehrere Anwendungen nennen, schaffen es gelegentlich, diese Identifizierung aufzubrechen. Hier wird deutlicher zwischen Vektoren und Pfeilen einerseits sowie ihrer Funktion andererseits unterschieden. [...] Aber auch diesen Schülern gelingt es in ihrem Aufsatz nicht, lokale Identifizierungen wie die von Vektor und Kraftpfeil aufzubrechen.“ (Wittmann, 1996, S. 113)

Im Rechentest zeigte sich, dass bis auf eine Ausnahme alle Schülerinnen und Schüler Vektoren fehlerfrei addieren und in zwei Komponenten zerlegen konnten. Eine Aufgabe zur Dreiecksungleichung zeigte, dass einige Schülerinnen und Schüler nur eindimensional mit dem Zahlenstrahl argumentierten. In den Aufsätzen wurden von den betreffenden Schülerinnen und Schülern die Vektoren ebenfalls nur eindimensional erklärt. Eine zweidimensionale Betrachtung wurde erst vorgenommen, wenn es die Aufgabe nötig machte (Wittmann, 1996).

Wittmann fasst zusammen, dass es möglich ist, den Schülerinnen und Schülern ein geometrisches Vektorkonzept zu vermitteln, mit dem sie anwendungsbezogen agieren können. Der Vektorbegriff erwies sich im parallel stattfindenden Physikunterricht als tragfähig. Wittmann sieht seine Unterrichtseinheit als ersten Schritt in einem Spiralcurriculum, in dem im Laufe der Zeit ein übergeordnetes Vektorkonzept zu entwickeln ist. Er hält den ersten Kontakt mit Vektoren auf geometrischer Ebene, der den Schülerinnen und Schülern offensichtlich eingängig ist, für bedeutsam.

4.2.4 Zusammenfassung

Mit Pfeilen lassen sich viele Bereiche der Vektorrechnung in der Schule sinnvoll und schlüssig behandeln. Das Symbol des Pfeils zeigt sich als eingängig und hervortretend und überwiegt in den Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler und auch Studierenden im Vergleich zur arithmetischen Darstellung eines Vektors. Für die Schule erscheint eine Einführung in die Vektorrechnung über Pfeile in allen Altersstufen vielversprechend. Die Anwendung von Pfeilen zur Darstellung von physikalischen Größen ist im Sinne eines aktuellen, anwendungsbezogenen Mathematikunterrichts realisierbar und es zeichnet sich ab, dass Schülerinnen und Schüler Vektoren in verschiedenen physikalischen Anwendungen erfahren müssen, um ein übergeordnetes Verständnis von Vektoren als flexible symbolische Darstellung entwickeln zu können. Dieser Aspekt findet sich in den Hypothesen im Kapitel 5.3 wieder.

4.3 Empirische Untersuchungen zu mentalen Werkzeugen

4.3.1 Mathematische Graphen als mentale Werkzeuge

Im Kapitel 2 wurde das mentale Werkzeug aus der psychologischen Theorie heraus entwickelt. Im Folgenden werden Arbeiten vorgestellt, die das Ziel verfolgen, mentale Werkzeuge empirisch nachzuweisen. Es sind folglich Symbole, genauer Symbolsysteme, zu finden, mit denen sich Wissen abstrakt darstellen und kompakt speichern lässt. Sie müssen sich flexibel zur Modellierung einsetzen lassen und Prozeduren ermöglichen. Insbesondere muss die aktive Nutzung einen Transfer von Wissen in neue Bereiche unterstützen und zu neuen Erkenntnissen führen. Im Folgenden werden Studien vorgestellt, die sich auf einen Altersbereich von Zwölfjährigen bis zu Studierenden beziehen. Dabei bleiben Untersuchungen, die sich dem Lernen in der Grundschule widmen, ausgespart, da sich das Maß an Abstraktion im Umgang mit Symbolen sehr von dem unterscheidet, was in den bereits aufgeführten Untersuchungen der Physik- und Mathematikdidaktik vorzufinden ist.

Mevarech und Stern (1997) führten mehrere Studien zu mathematischen Graphen durch, um deren Eignung als mentale Werkzeuge zu prüfen. Die Versuchspersonen der ersten Studie waren 12-jährige Schülerinnen und Schüler aus Israel, die alle bis dahin die gleiche schulische Laufbahn zurückgelegt hatten (deskriptives Design). Drei Tests wurden bezüglich ihrer Anforderung an die Versuchspersonen verglichen. Dazu wurde jedem Probanden ein Test vorgelegt. Der erste Test beinhaltete Graphen ohne einen lebensweltlichen Inhalt, in den anderen beiden Tests wurden die Graphen im lebensweltlichen Kontext von finanziellem Einkommen beziehungsweise einer Wasserpumpe genutzt. Die zur Lösung der Fragen benötigten mathematischen Fähigkeiten waren die gleichen. Es zeigte sich, dass der abstrakte Test besser gelöst wurde als die beiden kontextualisierten. In drei folgenden Studien wurde zum einen die Altersgruppe und zum anderen die Themenbereiche der Kontexte erweitert. In den ersten beiden Studien konnte gezeigt werden, dass auch für israelische Studierende Aufgaben zu Graphen ohne lebensweltlichen Bezug leichter zu lösen sind. In einer kleineren Studie mit Zwölfjährigen einer israelischen Schule wurde ein erweitertes Untersuchungsdesign gewählt. Jede der zwei Versuchsgruppen bekam zwei Tests jeweils mit und ohne lebensweltlichem Kontext, jedoch in unterschiedlicher Reihenfolge vorgelegt. Es zeigte sich wieder, dass die Tests ohne Kontext von beiden Gruppen besser gelöst wurden. Es ist bemerkenswert, dass in der letzten Untersuchung die Tendenz sichtbar wurde, dass die Gruppe, die zuerst den abstrakten und anschließend den kontextualisierten Test bearbeitete, auch im zweiten Test erfolgreicher abschnitt. Mevarech und Stern konnten durch eine Inhaltsanalyse zeigen, dass je nach Fragestellung unterschiedliche Lösungsstrategien von den Probanden aktiviert werden. Reale Kontexte führen zum Abruf von lebensweltlichen Konzepten und Erfahrungen. Bei Aufgaben ohne lebensweltlichen Kontext wird mathematisches Wissen aktiviert.[7] Sind die Probanden bereits im ersten von zwei Tests mit dem abstrakten Konzept in Kontakt gekommen, fördert das die Aktivierung dieses Konzepts im nachfolgenden kontextualisierten Test. Mevarech und Stern fassen zusammen: „Taken together, results of all four experiments showed that a sparse context facilitated understanding of abstract mathematical concepts more than real contexts.“[8] (S. 68) Anwendungsorientierte Aufgaben sind für die Schülerinnen und Schüler schwierig, da die Kontexte die mathematische Struktur des Problems verdecken. Dies deckt sich mit den Ergebnissen der mathematik- und physikdidaktischen Forschung zur Nutzung von Pfeilen in abstrakten beziehungsweise anwendungsbezogenen Aufgabenstellungen, siehe S. 39 und S. 45. Andererseits konnten Mevarech und Stern sichtbar machen, dass es möglich ist, abstrakte Lösungsstrategien zumindest kurzfristig zu aktivieren und für die Schülerinnen und Schüler verfügbar zu machen. Mit Blick auf die Schule raten Mevarech und Stern zu einem vielfältig gestalteten Unterricht. Denn zum einen sind abstrakte Inhalte mit wenig lebensweltlichem Bezug auch in der Einstiegsphase wichtig, um abstrakte Konzepte für die Schülerinnen und Schüler sichtbar zu machen, und zum anderen ist ein lebensnaher Unterricht neben der Förderung der Motivation notwendig, um die Anwendung mathematischer Konzepte zu üben und für reale Problemsituationen verfügbar zu

[7] Dies ist auch von anderen Problemstellungen bekannt. So ist zum Beispiel das mathematische Knobelspiel „Die Türme von Hanoi“ in einem Kontext mit Akrobaten und Monstern schwieriger zu lösen als ohne (Mevarech und Stern 1997, S. 80, siehe auch Anderson 1996, S. 252).

[8] Eigene Übersetzung: Zusammenfassend zeigen die Ergebnisse aller vier Experimente, dass ein reduzierter Kontext für das Verstehen von abstrakten, mathematischen Konzepten förderlicher ist als lebensweltliche Kontexte.

machen.

Im Jahr 2003 veröffentlichten Stern et al. die Ergebnisse von vier Studien, die das Ziel hatten, die Transfer fördernde Wirkung von Graphen, die diese als mentales Werkzeug besitzen sollten, zu prüfen. Vier Versuchsgruppen mit Probanden verschiedener Ausbildungsrichtungen wurden zusammengestellt. Die erste Gruppe bestand aus Studierenden der Wirtschaftswissenschaften, die zweite Gruppe setzte sich aus Studierenden der Mathematik und der Informatik, die dritte aus Studierenden der Geisteswissenschaften zusammen. Die vierte Gruppe wird von Auszubildenden mit dem angestrebten Abschluss Industriekaufmann/-frau gebildet. Die Autoren gingen davon aus, dass diese über unterschiedliche Fähigkeiten im Umgang mit Graphen verfügten. Im Gegensatz zur oben beschriebenen Studie nahmen die Probanden an jeweils einem von drei Treatments teil. In jedem Treatment befanden sich Vertreter jeder Gruppe. In den beiden ersten Treatments waren zum Thema Lagerhaltung Texte zu lesen und Übungsaufgaben zu bearbeiten. Diese Probanden bildeten die Versuchsgruppen. Im ersten Treatment waren die Probanden explizit aufgefordert, einen Graphen zu erstellen. Im zweiten Treatment war ein Graph bereits zusätzlich zum Text dargestellt. Im anschließenden Test wurden Aufgaben zur Kostenkalkulation, also einem anderen aber strukturell ähnlichen Thema, gestellt. Das dritte Treatment umfasste eben diese Kostenkalkulation, ließ jedoch dabei Graphen vollständig außen vor. Die Mitglieder dieser Gruppe bildeten die Vergleichsgruppe, sie hatten keinen inhaltlichen Transfer zu leisten, wohingegen die anderen Versuchspersonen einen Transfer vom Inhaltsbereich der Lagerhaltung auf den Bereich der Kostenkalkulation erbringen mussten. Allen Versuchspersonen wurde der Hinweis gegeben, dass das Erstellen eines Graphen hilfreich sein kann. Die Auswertung zeigte im Gegensatz zu den Erwartungen der Autoren, dass die Studierenden der Wirtschaftswissenschaft und der Mathematik bzw. Informatik immer von Graphen profitierten, ganz gleich, ob sie diesen aktiv oder passiv im Treatment begegneten. Im Gegensatz dazu konnten die Gruppen der Geisteswissenschaftler und der Auszubildenden in keinem Fall von den Treatments mit Graphen profitieren. Die Nutzung von Graphen als Werkzeug hängt demzufolge vom Werdegang und nicht von den Treatments ab. Eine tiefergehende Analyse der Daten zeigte dann im Sinne der Vorstellungen vom mentalen Werkzeug, dass die Personen, die zur Lösung der Testaufgaben Graphen erstellten, unabhängig von ihrer Gruppenzugehörigkeit auch im Abschlusstest erfolgreich waren. Das bedeutet zusammenfassend, dass die Entscheidung für die Nutzung der Graphen zwar vom Werdegang der Personen abhing, die aktive Nutzung der Graphen jedoch stets hilfreich war.

Für die Folgestudie, die sich ausschließlich auf angehende Industriekaufleute stützte, wurden die Lerneinheiten überarbeitet. Das Design sah vor, dass die ersten beiden Gruppen im Treatment ein Thema bearbeiteten, das sich vom Testthema unterschied, während die dritte Gruppe das Thema des Test bereits im Treatment kennen lernte. Dabei erstellten die Probanden der ersten Versuchsgruppe die Graphen selbst, wohingegen die anderen beiden Gruppen fertig erstellte Graphen gezeigt bekamen. Stern et al. konnten zeigen, dass einzig das aktive Erstellen der Graphen zum Erfolg im Test führt.

Es lässt sich zusammenfassen, dass das aktive Erstellen eines Graphen, welches ein zentrales Charakteristikum eines mentalen Werkzeugs ist, den Transfer von Wissen fördert. Denn Probanden, die Graphen als ein mentales Werkzeug beherrschen, erbringen sogar bessere Leistungen als Probanden, die mit dem Inhalt der Testaufgaben vertraut sind. Es zeigt sich aber auch, dass der Umgang mit Graphen als Werkzeug geübt werden muss, denn es existieren Personen, die in ihrer Ausbildung verstärkt Graphen begegnet sind, sie aber scheinbar nur statisch zu deuten wissen und nicht fähig sind, diese flexibel und aktiv zur Generierung neuen Wissens zu nutzen. Graphen sind somit als mentales Werkzeug erkennbar, deren Nutzung erlernbar ist. Felbrich (2005) geht in ihrer Untersuchung einen Schritt weiter und widmet sich der Vermittlung von Graphen als mentales Werkzeug.

> „Es wurde argumentiert, dass es für eine flexible Anwendung der Graphen als Denkwerkzeuge notwendig ist, seine spezifischen Möglichkeiten und Einschränkungen zu erkennen, die sich aus seinen Konstruktionsbedingungen bzw. strukturellen Prinzipien ergeben.“ (Felbrich, 2005, S. 2006)

Felbrich berichtet, dass Schülerinnen und Schüler Graphen häufig nicht adäquat anwenden können, so ist zum Beispiel eine typische Fehlinterpretation die bildliche Deutung, in der zum Beispiel in einem Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm ein zu besteigender Berg gesehen wird. Und selbst wenn den Schülerinnen und Schülern das Lesen eines Graphen gelingt, messen sie zumeist nur der absoluten Höhe des Graphen eine Bedeutung bei und beachten die Steigung und den Achsenabschnitt nicht. Die Möglichkeit der Interpretation geht verloren und damit das Potenzial, Graphen als mentales Werkzeug zur Generierung neuen Wissens zu nutzen.

Eine von Felbrich benutzte Methode zur Vermittlung der vielfältigen Nutzungsmöglichkeiten von Graphen ist das Kontrastieren (contrasting). Dabei werden die für einen Graphen charakteristischen Merkmale durch das Gegenüberstellen verschiedener Anwendungen von Graphen herausgehoben. In der Untersuchung finden zwei Arten des Kontrastierens ihre Anwendung: die Variation des Inhalts (content contrasting) und der Struktur (structural contrasting). Das inhaltliche Kontrastieren wird durch den Austausch der von der Ordinate dargestellten Größe erreicht. So wird in der Lerneinheit sowohl der Weg als auch die Anzahl über der Zeit aufgetragen. Der strukturelle Kontrast wird durch den Wechsel der dargestellten Größen auf Ordinate und Abszisse erzeugt. Im Detail bearbeiten die Versuchspersonen Diagramme in denen der Weg über der Zeit als auch die Zeit über dem Weg aufgetragen sind.

In der Untersuchung sind Fünftklässler an zwei Nachmittagen geschult worden. Vier Treatments wurden durchgeführt, je eines mit inhaltlichem bzw. strukturellem Kontrast, eines mit beiden Kontrasten und eines ohne die Methode des Kontrastierens. Eine Baselinegruppe wurde ohne Unterricht getestet. Mit einem Test, der Aufgaben von unterschiedlichem Grad an Transfer enthielt, wurden die Gruppen evaluiert. So existierten Aufgaben zu bekannten Inhalten, also Weg-Zeit-Diagrammen, und unbekannten Inhalten wie Diagrammen in denen der elektrischer Strom über Zeit oder die Gewichtszunahme über die Futtermenge aufgetragen ist. Genutzt wurden sie in konventioneller und unkonventioneller Darstellung (zum Beispiel Zeit über Weg). Felbrich konnte zeigen, dass die Gruppen, die einen Unterricht mit Kontrasten erfahren haben, im Vergleich zur Gruppe ohne Kontrastierens bezüglich Aufgaben mit unbekannten Inhalten in unkonventioneller Darstellung erfolgreicher sind. Die Gruppe, die den Unterricht mit strukturellem Kontrast erhielten, ist in diesem Aufgabenbereich am besten, und nicht, wie zu erwarten gewesen wäre, die Gruppe, die beide Arten des Kontrastes kennen gelernt hatten. Ein doppeltes Kontrastieren führte bei den Probanden mit schlechteren Lernvoraussetzungen zur Überlastung und somit zur Absenkung des Gesamtgruppenergebnisses. Keine Unterschiede waren zwischen den Treatment-Gruppen zu finden, wenn in den Aufgaben bekannte Inhalte behandelt oder konventionelle Darstellungen genutzt wurden. Felbrich konnte mit dieser Untersuchung zeigen, dass es durch speziellen Unterricht möglich ist, die Nutzung von Graphen zu flexibilisieren und Transfer fördernd zu entwickeln. Die Methode des Kontrastierens erscheint vielversprechend, um Graphen als mentale Werkzeug zu vermitteln, wenngleich eine übermäßige Variation der Anwendungsmöglichkeiten zu vermeiden ist. Durch das Kontrastieren werden Grenzen und Möglichkeiten der Handhabung von Graphen deutlich gemacht, was notwendig ist, wenn die gestellten Aufgaben nicht den Standardsituationen entsprechen.

4.3.2 Pfeile als mentale Werkzeuge

Eine Studie aus der Lernpsychologie mit Bezug zur Physik ist von Savelsbergh (1999) durchgeführt worden. Dieser möchte Pfeile im Mechanikunterricht im Kontext des Hebels als Werkzeug für die Schülerinnen und Schüler nutzbar machen. In Zeichnungen sollen zur Repräsentation von Kräften

Pfeile eingetragen werden. Auf diesem Weg sollen sich die Schülerinnen und Schüler die Angriffspunkte, die Größe und die Richtungen der Kräfte verdeutlichen. Durch die um Pfeile erweiterte Zeichnung soll es gelingen, die Problemstellung zu abstrahieren um anschließend die Hebelgesetze der Mechanik anwendbar zu machen.

An der Studie nahmen Achtklässler, die bis dahin keinen Mechanikunterricht erhalten hatten, und Neuntklässler teil, die mit der Mechanik im herkömmlichen Sinne ohne eine systematische Nutzung von Pfeilen vertraut waren. Entgegen den Erwartungen des Autors zeigte sich, dass die Versuchspersonen Pfeile nicht als Werkzeug zum Lösen der gestellten Probleme einsetzen konnten. Die qualitative Bearbeitung von Problemen war für die Schülerinnen und Schüler ungewohnt. Das Benennen der Angriffspunkte und die Bestimmung der Pfeillängen, ohne sich von den geometrischen Abmessungen der gezeichneten Objekte irritieren zu lassen, stellten Probleme dar. Auch kam es zu Verwechslungen zwischen der Kraft und der Bewegung der Körper. Es lässt sich zusammenfassen, dass mit und ohne Erfahrungen in der Mechanik Schwierigkeiten bestehen, Pfeile als Werkzeug zur Strukturierung von lebensnahen Aufgabenstellungen im Zusammenhang mit den Hebelgesetzen zu nutzen. Es ist kritisch zu bemerken, dass der Unterrichtsinhalt eventuell ungeeignet ausgewählt worden ist. Zum einen ist die Kraft eine nicht sehr intuitive physikalische Größe (vergleiche S. 24 und auch Willer 2003, Kap. 8.6 bzw. 11.7), zum anderen umfasst der Unterricht neben der Darstellung einer Kraft als Pfeil mit den definierten Größen Länge, Richtung und Angriffpunkt auch die Projektion der Kraft auf virtuelle Hebel, um mit rechtwinklig angreifenden Kräften argumentieren zu können. Eine Begründung, Herleitung oder experimentelle Überprüfung des Verfahrens existiert nicht. Die abstrakten Eigenschaften und Nutzungsregeln von Pfeilen im Sinne eines mathematischen Vektors bleiben von Savelsbergh unberücksichtigt.

4.3.3 Zusammenfassung

Die vorgestellten Studien aus der Lernpsychologie zeigen, dass es möglich ist, Graphen als mentales Werkzeug zu nutzen. Problemstellungen können bei entsprechendem Vorwissen oder Training abstrakt und kompakt dargestellt und verarbeitet werden. Eine aktive Nutzung von Graphen, die über die Betrachtung einer statischen Darstellung hinausgeht, lässt die Versuchspersonen unbekannte Aufgaben bewältigen. Wissen über Graphen kann in neuen Inhaltsbereichen genutzt werden, Graphen wirken dementsprechend förderlich auf den Transfer von Wissen. Mit der Trainingsmethode des Kontrastierens erscheint es möglich, Nutzungsmöglichkeiten und Regeln sichtbar zu machen, um Graphen flexibel einzusetzen. Entsprechend der Definition mentaler Werkzeuge lassen sich Graphen als solche auch empirisch in vielerlei Hinsicht erkennen.

Der bisher unternommene Versuch von Savelsberg Pfeile als ein Werkzeug einzusetzen, ist nicht positiv verlaufen. Pfeile sind jedoch in der genannten Studie nur speziell am Inhalt des Hebels genutzt worden. Die Entwicklung eines vielfältigen Werkzeugs für die Mechanik beziehungsweise die Physik zur Darstellung gerichteter Größe generell wurde bisher nicht verfolgt.

4.4 Zusammenfassung und Konsequenzen

In den vorangegangen drei Unterkapiteln wurden Untersuchungen aus den drei Fachrichtungen der Didaktik der Physik, der Didaktik der Mathematik und der Lernpsychologie vorgestellt. Jede Gruppe hat für sich eine eigene Sicht auf die Pfeile als Mathematisierung physikalischer Größen, als graphische Repräsentantion eines Vektors und als mentales Werkzeug. Die Lernpsychologie sieht in Pfeilen wie auch in Graphen Symbole, die zur Gewinnung von neuem Wissen und Verständnis wie ein Werkzeug nutzbar und verwendbar sind. Es sollte entsprechend dieser Perspektive der Kern jedes Unterrichts sein, Darstellungsformen derart flexibel zu nutzen, dass sie nicht nur zur statischen Darstellung von Fakten dienen, sondern zur Manipulation und Wissensproduktion geeignet sind. Es konnte in Studien zu Graphen gezeigt werden, dass mit Unterricht, der Handlungsoptionen betont, eine Nutzung im Sinne eines mentalen Werkzeugs erkennbar ist. Ähnlich sind die Erkenntnisse der Mathematikdidaktik. Es erscheint sinnvoll, Pfeile anhand verschiedener Anwendungen, zum Beispiel als Orts- und Geschwindigkeitspfeil, einzuführen. Pfeile werden im beschriebenen Mathematikunterricht nahezu gleichzeitig mit verschiedenen Anwendungen in Verbindung gebracht, um die Variabilität zu betonen. Es existiert die begründete Vermutung, dass ein angemessenes Verständnis eines Vektors bei Schülerinnen und Schülern vorhanden ist, wenn diese Pfeile zur Darstellung verschiedener Größen eingesetzt werden.

In der Physik lassen sich Pfeile, wie es zahlreiche Untersuchen belegen konnten, in verschiedenen Themenbereichen sinnvoll nutzen, um gerichtete Größen der Mechanik beziehungsweise wellenartige Größen der Optik und Quantenphysik klar und kompakt zu beschreiben. Jedoch werden Pfeile in den aufgeführten Konzepten zu Beginn stets nur mit einer physikalischen Größe in Verbindung gebracht und erst im Laufe des Unterrichts auch zur Darstellung anderer Größen genutzt. Die Thematik der Vektorrechnung läuft quasi neben dem zentralen Lerninhalt mit und Gemeinsamkeiten und Besonderheiten der Nutzung von Pfeilen werden nicht herausgestellt. Es lässt sich schließen, dass es aus der Sicht der verschiedenen Forschungsbereiche wünschenswert wäre, wenn Pfeile unabhängig von ihrer Anwendung flexibel zur Darstellung und zur Gewinnung von neuen Erkenntnissen genutzt würden. Ob ein Unterricht, der Anwendungsmöglichkeiten von Pfeilen betont, diese Art der Nutzungsoptionen für Schülerinnen und Schüler eröffnet, versucht die empirische Studie ab dem Kapitel 5 zu klären.

Kapitel 5

Forschungsfrage und Hypothesen

5.1 Forschungsfrage

Aufbauend auf der Theorie der Lernpsychologie konnte gezeigt werden, dass Pfeile die Eigenschaften eines mentalen Werkzeugs besitzen, wenn sie entsprechend den Konventionen und Bearbeitungsverfahren der geometrischen Vektorrechnung benutzt werden (siehe Kap. 2). Mit diesen Vektorpfeilen lassen sich nicht nur physikalische Größen kompakt darstellen, sondern auch Situationen modellieren, Problemstellungen bearbeiten und Lösungen gewinnen. Dabei schaffen die Regeln der geometrischen Vektorrechnung die Grundvoraussetzung für Prozeduren, mit denen zum einen Lösungsroutinen möglich werden und zum anderen auch neue Problemlösungen gefunden werden können. Durch die Modellierung der realen Situation durch Pfeile eröffnen sich eine neue Perspektive und verschiedene Handlungsoptionen. Existiert abstraktes Wissen über Pfeile, also über die Flexibilität zur Darstellung verschiedener physikalischer Größen und über verschiedene Prozeduren innerhalb der Pfeildarstellung, so ist es möglich, neue, unbekannte Wissensbereiche zu erarbeiten. Somit lassen sich Pfeile produktiv und zur Generierung neuen Wissens nutzen.

Die physikdidaktische Forschung nähert sich den Pfeilen von der Anwendung her. Pfeile werden in verschiedenen Unterrichtsvorschlägen und Untersuchungen erfolgreich zur Darstellung und Bestimmung vektorieller Größen in unterschiedlichen Themenbereichen genutzt (siehe Kap. 3). Physikalische Fragestellungen können dabei auf hohem Niveau bearbeitet und gelöst werden. Verschiedene Untersuchungen liefern vielversprechende Ergebnisse (siehe Kap. 4.1). Bisher sind die Untersuchungen jedoch von der physikalischen

Thematik, insbesondere der newtonschen Dynamik geprägt. Pfeile werden in den Unterrichtskonzepten vorwiegend zur Darstellung einer einzigen Größe, wie der Geschwindigkeit, angewand. Eine themenübergreifende Nutzung von Pfeilen im Physikunterricht ist bisher nicht untersucht worden.

Studien, die im Pfeilformalismus eine flexible Darstellungsform sehen, sind in der Mathematikdidaktik zu finden (siehe Kap. 4.2). Es ist für den Mathematikunterricht sinnvoll, Vektoren mit frei verschiebbaren Pfeilen zu identifizieren. Der Pfeil ist charakteristisch und wird von den Schülerinnen und Schülern verstärkt wahrgenommen. Entscheidend ist die flexible Nutzung in verschiedenen Aufgaben- und Problemsituationen. Dafür ist zu vermitteln, dass sich Pfeile zur Darstellung von verschiedenen Größen eignen. Eine Identifizierung des Pfeils mit der dargestellten Größe durch die Lernenden ist zu vermeiden. So ist zum Beispiel einer Reduzierung des Pfeils als spezielle Darstellungsform einer Verschiebung vorzubeugen. Denn somit wäre eine Übertragung von Wissen in einen anderen Inhaltsbereich verbaut. Es deutet sich an, dass Schülerinnen und Schüler, die von sich aus Pfeile mit mehreren Anwendungen in Verbindung bringen, generell ein allgemeineres und abstrakteres Verständnis von Pfeilen besitzen. Die Vermittlung mehrerer Pfeilanwendungen scheint dementsprechend zu einem übergeordneten Verständnis der Pfeile beizutragen.

Im Kontext mathematischer Symbolsysteme ist der empirische Nachweis eines mentalen Werkzeugs am Beispiel der Graphen erbracht worden (siehe Kap. 4.3). Mit einer Lerneinheit, die Anwendungen vielfältig thematisierte, konnte ein tiefergehendes, flexibles Verständnis von Graphen bei Lernenden entwickelt werden. Es konnte gezeigt werden, dass Graphen den Transfer von Wissen fördern und somit als mentale Werkzeuge funktionieren. Für die Untersuchung der Pfeile ergibt sich aus diesen Betrachtungen die Forschungsfrage:

> **Sind Vektorpfeile als mentale Werkzeuge empirisch nachweisbar?**

Es wäre entsprechend zu zeigen, dass sich Pfeile flexibel zur Darstellung und Bestimmung unterschiedlicher physikalischer Größen nutzen lassen und den Transfer von Wissen begünstigen.

5.2 Eingrenzung der Untersuchung

Um die Forschungsfrage empirisch untersuchbar zu machen, ist sie einzugrenzen und zu konkretisieren. Mit Blick auf die vorangegangenen Kapitel lassen sich Inhalte und Unterrichtsverfahren geeignet auswählen, um empirisch prüfbare Hypothesen zu formulieren.

5.2.1 Wahl der Pfeilanwendungen

Um das Prinzip der Pfeile deutlich zu machen, sind verschiedene physikalische Größen auszuwählen, die vergleichsweise einfach zu erfassen sind, um fachphysikalische Schwierigkeiten auszuschließen. Wie im Kapitel 3.2 deutlich gemacht wurde, ist als Einstiegsthema einzig die Mechanik geeignet. Denn die mechanischen Größen sind in Betrag und Richtung direkt messbar und gleichzeitig in einer Vielzahl vorhanden. Andere Themenbereiche wie Optik oder Elektrizitätslehre, in denen die Pfeile als Phasenzeiger genutzt werden, sind für eine Einführung entsprechend ungeeignet.

Auch innerhalb der Mechanik ist die Wahrnehmung und Nutzung der Pfeile je nach Anwendung verschieden (siehe Kap. 3.2.1). Entsprechend lässt sich vermuten, dass das Pfeilkonzept für die Probanden unterschiedlich leicht zu erkennen ist. Die dargestellten Größen sollten leicht in Richtung und Betrag wahrnehmbar und messbar sein, um nicht physikalische Verständnisfragen wie im Fall der Beschleunigung oder spezielle Konventionen in den Vordergrund treten zu lassen.

Für die Studie sind die Größen Geschwindigkeit und Kraft ausgewählt worden. Die Pfeile werden also als Geschwindigkeitspfeil und Kraftpfeil angewendet. Beide Größen sind in Betrag und Richtung verhältnismäßig einfach zu erfassen. Die Kraft wird über die Begriffe Zug und Schub lebensnah festgelegt (Giancoli 2006, S. 105; Boczianowski 2007). Gerade im statischen Fall besteht auch bei lebensweltlicher Betrachtung kein Zusammenhang zwischen Kraft und Geschwindigkeit. Somit stehen die Größen in einem Kontrast zueinander, der wünschenswert ist, um Pfeile als flexible Darstellungsform zu vermitteln. Zum Beispiel wäre dies durch die Nutzung der Größen Verschiebung und Geschwindigkeit aller Voraussicht nach nicht erreicht worden. Diese Größen machen nicht deutlich, dass auch gerichtete Größen außerhalb des Kontexts der Bewegung darstellbar sind. Geschwindigkeits- und Kraftpfeile vermitteln, so die Annahme, einen Eindruck vom Spektrum der innerhalb der Mechanik durch Pfeile darstellbaren Größen.

Ein weiteres Augenmerk liegt auf der Betonung des Betrages der dargestellten Größe. In beiden Fällen ist eine Deutung der Länge des Pfeiles als Betrag einer anders gearteten physikalischen Größe vorzunehmen. Im Fall einer Ortsgröße, wie der Verschiebung und des Ortes, steht der Maßstab lediglich für eine Skalierung, während es sich außerhalb dieser Spezialfälle um eine Verknüpfung physikalischer Einheiten handelt. Gegen Ortspfeile spricht außerdem, dass diese schwer als verschiebbarer Pfeil vermittelbar sind, was jedoch für ein vektorielles Verständnis der Pfeile notwendig ist (siehe Kap. 3.2.1 und 4.2.1). Für Geschwindigkeit und Kraft lässt sich dies in einem Pfeilplan geeignet umsetzen.

5.2.2 Gestaltung der Lerneinheit

Um Pfeile als flexible Darstellungsform zu vermitteln, erscheint es sinnvoll, diese vielfältig mit unterschiedlichen physikalischen Größen anzuwenden. Im Zusammenhang mit mathematischen Graphen konnte empirisch gezeigt werden, dass sich diese durch Variation der dargestellten Größen als mentale Werkzeuge vermitteln lassen. Das spricht dafür, dass sich die Kenntnis von mehreren physikalischen Größen als Anwendung von Pfeilen hilfreich auf das Verständnis dieser auswirkt. Eine Lerneinheit, die mehrere verschiedene Anwendungen von Pfeilen aufzeigt, sollte dementsprechend zu einem flexibleren Verständnis von Pfeilen führen, als eine Lerneinheit, die nur einzelne oder gar keine Anwendungen zum Gegenstand hat. Es gilt also empirisch zu prüfen, ob auf diesem Weg eine Entwicklung der Pfeile zu einem mentalen Werkzeug möglich ist. Dazu werden verschiedene Lerneinheiten realisiert.

Wie zuvor dargestellt, sind als Anwendungen von Pfeilen die Geschwindigkeit und die Kraft sinnvoll. Entsprechend werden in einer Lerneinheit beide Anwendungen gleichzeitig thematisiert. In einer weiteren Lerneinheit werden Pfeile anhand der Geschwindigkeit, also mit nur einer einzigen Anwendung, eingeführt. Außerdem wird eine Lerneinheit durchgeführt, in der die Anwendungen ausgespart sind und Pfeile ausschließlich ohne physikalischen Kontext, abstrakt-mathematisch unterrichtet werden. Durch eine anschließende Evaluation werden die Leistungen der Gruppen erhoben. Entsprechend den im Unterricht behandelten Pfeilanwendungen wird nach Leistungen im Umgang mit Geschwindigkeitspfeilen, mit Kraftpfeilen und anwendungsfreien Vektorpfeilen differenziert. Außerdem werden die Leistungen im Zusammenhang mit weiteren physikalischen Größen, also unbekannten Pfeilanwendungen, erhoben. Diese sind von besonderem Interesse, da entsprechend der Theorie erwartet wird, dass Pfeile nach anwendungsreichem Unterricht auch mit unbekannten Anwendungen erfolgreich genutzt werden, sie also im Sinne eines mentalen Werkzeugs funktionieren.

Neben den drei unterrichteten Gruppen, den Treatmentgruppen, im Folgenden mit T2, T1 und T0 abgekürzt, wird eine weitere Gruppe getestet, die keinen Unterricht zu Vektorpfeilen erhalten hat. Auf diese Weise wird festgestellt, welche Leistungen auch ohne Teilnahme an einer Lerneinheit möglich sind. Denn es ist nicht auszuschließen, dass Personen Fertigkeiten im alltäglichen Leben und in der Schule erworben haben, die es ihnen ermöglichen, in der Evaluation erfolgreich zu sein. Die Gruppe zur Festlegung dieses

Grundwissens wird mit Baselinegruppe beziehungsweise BL bezeichnet. Im Detail sind die Untersuchungsmethoden nach den Hypothesen im Kapitel 6 beschrieben.

5.3 Hypothesen

5.3.1 Allgemeiner Leistungszuwachs

Die drei Treatmentgruppen sollten durch die Lerneinheiten Wissen über Pfeile erwerben. Gleichzeitig sollten auch aufgrund von Schule und Alltag in gewissem Umfang Fertigkeiten im Umgang mit Pfeilen existieren, über die auch die Baselinegruppe verfügt. Es ist zu erwarten, dass die Teilnahme an einer Lerneinheit zu einem Leistungszuwachs bei den Probanden der Treatmentgruppen führt.

Die Hypothese 1

> Die unterrichteten Gruppen bringen unabhängig von der Pfeilanwendung der Aufgaben höhere Leistungen im Umgang mit Pfeilen als die nicht unterrichtete Gruppe.

5.3.2 Abstrakt-mathematische Leistung

Die Kenntnis um verfügbare Prozeduren ist wesentlich für die Nutzung von mathematischen Symbolsystemen. Entsprechend sind die mathematischen Regeln der geometrischen Vektorrechnung für die Nutzung der Pfeile als mentales Werkzeug von Wichtigkeit. In der Leistungsevaluation werden diese Rechenregeln ohne einen physikalischen Kontext erhoben. Es ist bei Betrachtung der Gruppen von Interesse, inwieweit der Unterricht, der anhand physikalischer Anwendungen Konventionen und Rechenregeln schult, zu ähnlichen abstrakt-mathematischen Leistungen führt wie eine Lerneinheit, der Anwendungen fehlen. Es ist anzunehmen, dass die Treatmentgruppe T0, die sich ausschließlich den mathematischen Aspekten der geometrischen Vektoren gewidmet hat, aufgrund der vermehrten Zeit und der Spezialisierung bessere Leistungen erzielt als Gruppen, die nicht derart mathematisch fokussiert unterrichtet wurden. Die Lerneinheiten der beiden anwendungsbezogen unterrichteten Gruppen T1 und T2 unterscheiden sich im Anteil der mathematischen Inhalte nicht, entsprechend sind die erwarteten Leistungen in diesem Bereich gleich. Die Anzahl unterrichteter Anwendungen sollte keine Auswirkungen auf die abstrakt-mathematischen Leistungen haben.

Die Hypothese 2a

> Die Gruppe, deren Lerneinheit ausschließlich anwendungsfreie Inhalte umfasst, zeigt bessere abstrakt-mathematische Leistungen als die Gruppen, die Pfeile im Zusammenhang mit mindestens einer physikalischen Anwendung behandelt haben.

Die Hypothese 2b

> Die Gruppen, deren Lerneinheiten eine beziehungsweise zwei Anwendungen umfassen, zeigen gleiche abstrakt-mathematischen Leistungen.

5.3.3 Nahtransfer

Es ist anzunehmen, dass Versuchspersonen bessere Leistungen in solchen Aufgaben erbringen, in denen für sie bekannte Anwendungen auftauchen, als Versuchspersonen, denen die Anwendung zuvor nicht begegnet sind. Da die Gruppen T1 und T2 Pfeile als Geschwindigkeitspfeile kennen lernen, sollten ihnen Aufgaben mit dieser Anwendung leichter fallen als der Gruppe T0, die keine Gelegenheit hatte, Wissen über physikalische Anwendungen zu sammeln. Analog verhält es sich mit den Aufgaben zu Kraftpfeilen, deren Anforderung an die Gruppe T2 im Vergleich zu den anderen Gruppen geringer ausfallen sollte, da der Unterricht der Gruppe T2 die Anwendung Kraft einbezieht. Die Kenntnis der Anwendung in einer Aufgabe sollte sich für die Versuchsperson positiv auswirken.

Die Hypothese 3a

> Die Gruppen, deren Lerneinheiten eine bestimmte Pfeilanwendung zum Inhalt hat, zeigen im Zusammenhang mit genau dieser Anwendung höhere Leistungen als die Gruppen, die dieser Anwendung in ihrer Lerneinheit nicht begegnet sind.

Die Hypothese 3b

> Ist eine bestimmte physikalische Anwendung zwei Gruppen im Unterricht begegnet, so unterscheiden sich deren Leistungen zu genau dieser Anwendung nicht.

5.3.4 Ferntransfer

Wenn sich Pfeile durch einen anwendungsreichen Unterricht als mentale Werkzeuge vermitteln lassen, sollte es den entsprechenden Personen möglich sein, Pfeile generell und unabhängig von der Art der physikalischen Größe zur Darstellung dieser zu nutzen und geeignete mathematische Verfahren anzuwenden. Pfeile, deren flexible Nutzbarkeit erkannt wurde, sollten den Transfer von Wissen zwischen Inhaltsbereichen erleichtern, in denen gerichtete Größen eine Rolle spielen. Das heißt im Fall der Studie, dass sich die generelle Kenntnis um eine oder mehrere Pfeilanwendungen positiv auf die Leistung der Probanden auswirken sollte. Des Weiteren sollte der Transfer um so leichter fallen, je mehr physikalische Anwendungen im Unterricht behandelt wurden.

Die Hypothese 4a

> Die Gruppen, deren Lerneinheiten mindestens eine physikalische Anwendung von Pfeilen umfasst, erreichen bezüglich Aufgaben, die eine *andere* physikalische Anwendung beinhaltet, bessere Leistungen als die Gruppe, die keiner Anwendung in ihrer Lerneinheit begegnet ist.

Die Hypothese 4b

> Die Gruppe, deren Lerneinheit zwei physikalische Anwendungen einbezieht, erreichen bezüglich Aufgaben, die eine *andere* physikalische Anwendung umfassen, bessere Leistungen als die Gruppe, die nur einer Anwendung in ihrer Lerneinheit begegnet ist.

Im Kapitel 6 werden die hier allgemein formulierten Hypothesen mit den Untersuchungsmethoden und dem Auswerteverfahren in Verbindung gebracht und entsprechend als statistische Hypothesen präzisiert.

Kapitel 6

Methoden

6.1 Wahl des Untersuchungsverfahres

Die Validierung der formulierten Hypothesen kann mit unterschiedlichen Methoden und Verfahren geschehen. Einige Festlegungen haben sich im Rahmen der Eingrenzung der Untersuchung im Kapitel 5.2 bereits ergeben, weitere werden im Folgenden vorgenommen und begründet. Die Untersuchung ist experimentell angelegt (Bortz und Döring 2002, Kap. 2.3.3., Rost 2005, Kap. 3.8). Identische Gruppen von Versuchspersonen werden unterschiedlichen Treatments unterzogen, im Konkreten in Lerneinheiten unterrichtet und nachfolgend verglichen. Der variierte Parameter der Lerneinheiten ist die Anzahl der durch Pfeile dargestellten physikalischen Größen, den Pfeilanwendungen. Eine Variation von null bis zwei Anwendungen ist sinnvoll und realisierbar. Inhaltlich kommt, wie im Kapitel 5.2.1 dargestellt, für die Lerneinheiten nur die Mechanik in Frage. Explizit sind die Pfeilanwendungen Geschwindigkeit und Kraft ausgewählt worden, um die Nutzung von Pfeilen mit möglichst unterschiedlichen Größen zu erlernen. Drei Versuchsgruppen erhalten entsprechend Unterricht anhand von Geschwindigkeitspfeilen beziehungsweise anhand von Geschwindigkeits- und Kraftpfeilen oder ohne eine physikalische Anwendungen. Eine Vergleichsgruppe erhält keinen Unterricht. Eine weitere Versuchsgruppe, die mehr als zwei Anwendungen innerhalb einer Lerneinheit behandelt, wäre zwar umsetzbar, jedoch sind weitere typische Pfeilanwendungen, insbesondere der Ort, als unbekannte Anwendung für die anschließende Evaluation zurückzuhalten.

Mit Blick auf das dargestellte Design wäre es sinnvoll, eine weitere Versuchsgruppe zu implementieren, die als einzige Pfeilanwendung die Kraft thematisiert. Denn durch die Größen Geschwindigkeit und Kraft sind nicht nur die Pfeilanwendungen, sondern auch die Themenbereiche Kinematik und

Statik für den Unterricht festgelegt. Es ist nicht auszuschließen, dass die Themen unterschiedlich gut für die Vermittlung der Pfeile geeignet sind. Es wird jedoch erwartet, dass die Abhängigkeit gering ausfällt und der Aufwand für eine weitere Versuchsgruppe somit nicht gerechtfertigt wäre. Untersuchungen zu diesem Thema sind nicht bekannt. Es sei in diesem Zusammenhang betont, dass für eine sinnvolle Einführung der Pfeile kein tiefgehendes physikalisches Verständnis der Größen notwendig ist, sondern dass Richtung und Betrag der Größe klar erkennbar sind. Denn die Pfeile sollen gerade zur Entwicklung der physikalischen Begriffe wie der Kraft beitragen. Mit der Einführung der Kraft über die Tätigkeiten Ziehen und Drücken lässt sich eine sinnvolle Verknüpfung zu lebensweltlichen Vorstellungen herstellen, die für die Vermittlung von Pfeilen ausreichend ist (siehe Kap. 5.2.1). Schwierigkeiten im Zusammenhang mit der Geschwindigkeit können fehlende oder falsche Vorstellungen zum bewegten Beobachter (siehe Kap. 4.1.1) oder eine bereits festverankerte skalare Auffassung der Geschwindigkeit sein (siehe Kap. 4.1.1). Das erste Problem wird in den Lerneinheiten dadurch umgangen, dass die Bestimmung der Geschwindigkeit stets durch eine Beobachtung vom Erdboden aus vorgenommen wird. Das bedeutet, dass Geschwindigkeiten bezüglich eines bewegten Bezugssystems in einem vorhergehenden Schritt im Ruhezustand dieses Systems vermessen werden. Der skalaren Vorstellung von der Geschwindigkeit wird derart begegnet, dass in den Lerneinheiten ausschließlich von Geschwindigkeitspfeilen gesprochen wird, die Betrag und Richtung einer Bewegung beschreiben.

Die Ergebnisse der Untersuchung sollen auf die Schule übertragbar sein. Entsprechend werden die Lerneinheiten als Schulunterricht umgesetzt. Dafür ist in Kauf zu nehmen, dass die Zusammensetzung der Versuchsgruppen nicht zufällig, sondern durch die Schulklassen, also natürliche Gruppen bestimmt ist. Es handelt sich bei der Studie somit um eine quasi-experimentelle Studie (Bortz und Döring 2002, Kap. 8.2.5, Rost 2005, Kap. 3.9). Klassenabhängige Effekte können die Untersuchungsergebnisse überlagern. Um den Einfluss der natürlichen Gruppen auf die Untersuchung zu reduzieren, ist jede Versuchsgruppe aus zwei bis drei Schulklassen zusammengesetzt worden. Gleichzeitig wird auf diesem Wege auch die Abhängigkeit von der Schule eliminiert, da jede der beteiligten Schulen mit einer Klasse zu einer Versuchsgruppe beiträgt. Somit befinden sich in jeder der drei Treatmentgruppen drei Schulklassen unterschiedlicher Schulen. In der Vergleichsgruppe befinden sich zwei Schulklassen, da an einer der Schulen nur drei Schulklassen pro Jahrgang verfügbar waren. Das bedeutet, dass die Variablen der Klassen und der Schule weitestgehend kontrolliert sind. Um die Gleichheit der Gruppen bezüglich ausgewählter Kriterien prüfen zu können, werden die Gruppen vor der Lerneinheit durch einen Test verglichen.

Pfeile lassen sich im Schulunterricht von der Grundschule bis zum Studium einsetzen. Die Untersuchung orientiert sich bei der Festlegung des Alters der Versuchspersonen am aktuellen Unterrichtscurriculum, um eine Übertragbarkeit der Erkenntnisse zu ermöglichen. Vektorpfeile tauchen zum Zeitpunkt der Studie in Berlin zum ersten Mal im Physikunterricht der achten Klasse zur Darstellung von Kräften auf (Senatsverwaltung, 2006). Im Mathematikunterricht wird die Vektorrechnung erst in der Oberstufe Thema. Die Studie ist entsprechend vor den ersten Mechanikunterricht zu legen. Vorkenntnisse zu Pfeilen existieren dann allenfalls im Zusammenhang mit dem Zahlenstrahl. Dieser findet neben dem Unterricht der Grundschule in einigen Fällen im Mathematikunterricht der siebten Klasse im Kontext der negativen Zahlen Verwendung (Lergenmüller und Schmidt, 2006, Kap. 3.1).

Ein weiterer Aspekt bei der Festlegung der Untersuchung ist die Wahl der Schulform. Bei allen einbezogenen Schulen handelt es sich um Gymnasien. Es wird jedoch angenommen, dass auch in anderen Schulen eine Umsetzung der Lerneinheiten eventuell mit einem größeren Zeitaufwand möglich ist, da die Lerneinheiten losgelöst vom regulären Unterricht in ein neues Konzept einführen. Um einen Eindruck vom Anspruch der Vektorpfeile zu bekommen, sind die Ergebnisse der Studie abschließend nach leistungsstarken und leistungsschwachen Versuchspersonen geteilt betrachtet worden (siehe Kap. 11).

6.2 Gestaltung der Untersuchung

Die Studie besitzt ein Viergruppen-Design mit Prä- und Posttest, siehe Abb. 6.1. Die drei Lerneinheiten werden in vier Unterrichtsstunden an verschiedenen Berliner Gymnasien unterrichtet. Der Unterrichtsablauf ist in allen Treatments ähnlich gehalten. Das bedeutet, dass die Anteile an Diskussionen, Aufgabenbearbeitung, experimentierähnlichen Tätigkeiten und Vortrag in der Planung zeitlich festgelegt worden sind. Im Detail sind die Lerneinheiten im Kapitel 7 beschrieben. Die Unterrichtseinheiten der Studie fanden im normalen Ablauf des Schulgeschehens meist anstelle des Physik- und Mathematikunterrichts in den entsprechenden Räumen statt. Die gesamte Untersuchung ist inklusive Vor- und Nachtest für jede Klasse in einem Zeitraum von ungefähr zwei Wochen durchgeführt worden, wodurch eine ausreichende zeitliche Nähe der Unterrichtsstunden gegeben ist. Alle Unterrichtseinheiten sind vom Autor selbst unterrichtet worden. Damit ist die Variable der Lehrperson über alle Gruppen konstant.

Die Versuchspersonen werden durch unterschiedliche Tests mit verschiedenen Zielsetzungen evaluiert. Mit dem Vortest wird kontrolliert, ob sich die Gruppen nicht von vornherein bezüglich relevanter Eigenschaften unterschei-

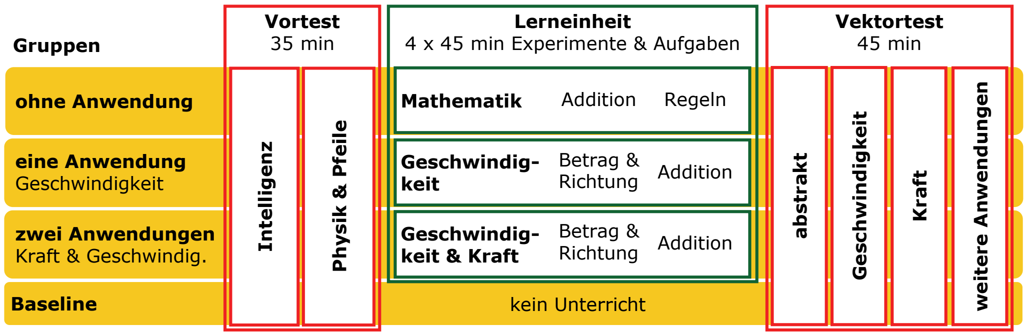


Abb. 6.1: Die Lerneinheiten der drei Treatmentgruppen unterscheiden sich in der Anzahl der Pfeilanwendungen, also der Anzahl der physikalischen Größen, die durch Pfeile dargestellt werden. Die Baselinegruppe erhält keinen Unterricht und dient dem Vergleich. Die Leistungen werden durch den Nachtest erhoben. Mit dem Vortest wird die Gleichheit der Gruppen vor dem Treatment kontrolliert.

den. Dazu werden kognitive, mathematische und physikalische Fähigkeiten erhoben. Die erste von zwei Skalen setzt sich aus Teilen eines gängigen Intelligenztests zusammen (Details siehe Kap. 8). Mit diesen werden mathematische Fertigkeiten und logisches Denken getestet. Die zweite Skala des Vortests beinhaltet sowohl Aufgaben zu Pfeilen in verschiedenen Kontexten als auch Aufgaben zum physikalischen Verständnis von Geschwindigkeit und Kraft. Mit einer Varianzanalyse werden die Gesamttestergebnisse verglichen.[1] Die Gruppen, die sich wie beschrieben aus mehreren Klassen verschiedener Schulen zusammensetzen, sind im Idealfall nicht signifikant verschieden. Ist dies nicht der Fall, existieren verschiedene Verfahren zur Anpassung der Gruppen (Matched Samples, Parallelisierung: Bortz und Döring 2002, Kap. 8.2.4, S. 527; Bortz (1999, S. 750 bzw. S. 752)). Für die beschriebene Untersuchung musste hiervon jedoch kein Gebrauch gemacht werden.

Um die Leistungen der Versuchspersonen nach der Lerneinheit im Umgang mit Pfeilen im Zusammenhang mit verschiedenen physikalischen Anwendungen zu erheben, mussten Testaufgaben entwickelt werden. Es existieren zwar verschiedene Tests zu Vektorpfeilen von verschiedenen Autoren, die als Orientierung hilfreich waren, jedoch zielen diese im Zusammenhang mit physikalischen Anwendungen der Pfeile auf das Verständnis der Mechanik und nicht auf die Nutzung der Pfeile (Jung et al., 1977; Reif und Allen, 1992; Wodzinski, 1996; Nguyen und Meltzer, 2003; Kanim et al., 2004; Shaf-

[1] Das Gesamtergebnis berechnet sich als geometrisches Mittel der beiden Subskalen. Im Vergleich zum arithmetischen Mittel hat sich das geometrische Mittel als aussagekräftiger erwiesen. Es besitzt in Untersuchungen von Brell et al. (2006) mit teilweise gleichen Testskalen eine größere Varianzaufklärung als die einzelnen Subskalen.

fer und McDermott, 2005; Wilhelm, 2005; Wilhelm et al., 2009). In einer Vorstudie wurden eigene Aufgaben entwickelt und analysiert (siehe Kap. 8 und Boczianowski und Schön 2008).

Der Nachtest ist ein klassischer Leistungstest im Multiple-Choice-Format. Vier Antwortoptionen mit nur einer korrekten Wahlmöglichkeit werden den Versuchspersonen angeboten. Doppelnennungen und fehlende Angaben werden als ungelöst gewertet. Jede korrekte Antwort trägt mit einem Punkt zum Testergebnis der Versuchsperson bei. Von offenen Antwortformaten ist abgesehen worden, da sich aufgrund oben genannter Quellen ausreichend Distraktoren formulieren ließen. Außerdem war es aufgrund begrenzter Resourcen notwendig, den Aufwand der Auswertung der Fragebögen gering zu halten.

Der Test besteht zur Differenzierung der Ergebnisse aus den vier Skalen Abstrakt, Geschwindigkeit, Kraft und Weitere, die sich auf die verschiedenen physikalischen Anwendungen der Pfeile beziehen, siehe wieder Abb. 6.1. Mit der Skala Abstrakt wird das Konzept der geometrischen Vektoren wie Zeichenkonventionen und Rechenmethoden abgefragt, das auf unterscheidlichen Weisen in allen Treatments behandelt worden ist. Aufgaben der Skala Geschwindigkeit betreffen die Darstellung von Bewegungen durch Geschwindigkeitspfeile. Auch die Addition von Geschwindigkeitspfeilen ist Thema. Analog werden in Aufgaben zur Pfeilanwendung Kraft die Darstellung von Schub und Zug und die Addition von Kräften abgefragt.

Bezüglich jeder Skala erreicht eine Versuchsperson einen Punktwert, der sich aus der Summe der korrekt gelösten Aufgaben zusammensetzt. Es ist dabei zu beachten, dass die Punktwerte nur innerhalb einer Skala vergleichbar sind. Eine Normierung in der Hinsicht, dass auch die Punktwerte verschiedener Skalen vergleichbar sind, ist nicht möglich und auch nicht notwendig.[2] Anhand der Punktwerteverteilungen der Gruppen innerhalb der vier Skalen lassen sich diese vergleichen und Unterschiede, die aus dem Unterricht resultieren, festmachen.

6.3 Auswerteverfahren

6.3.1 Gruppenvergleiche

Die in der Studie verwendeten statistischen Methoden sind Standardverfahren der empirischen Sozialforschung und sind in der verwendeten Statistik-

[2] Die Punktwerte sind im Ergebnisteil stets auf Eins normiert. Dennoch ist ein Vergleich zwischen den Skalen nicht zulässig. Die Lage und die Form der Verteilungen sind von Bedeutung, siehe Bortz (1999), Kap. 1.4.3.

Software SPSS implementiert. Eine detaillierte Beschreibung der Verfahren findet sich im empfehlenswerten Buch von Field (2005, Kap. 8) und im Standardwerk von Bortz (1999, Kap. 7 & 14). Um die Auswertung auch für Leserinnen und Leser nachvollziehbar zu machen, die mit empirischen Methoden nur wenig vertraut sind, sind die grundlegende mathematischen Aspekte der Vergleiche von Gruppen im Anhang A anhand der Studie erläutert (siehe auch Boczianowski, 2009).

Alle Gruppen besitzen bezüglich jeder Skala des Nachtests eine Punktwerteverteilung, die sich aus den Testergebnissen der jeweiligen Versuchspersonen ergibt. Diese Verteilungen beschreiben die Leistungsausprägungen der Gruppen. Mithilfe des statistischen Verfahrens der „geplanten Kontraste“ lassen sich die Punktwerteverteilungen der Gruppen vergleichen. Dieses Verfahren bietet die Möglichkeit, ähnlich einer Varianzanalyse, mehr als zwei Gruppen auf Signifikanz der Unterschiede zu prüfen. Kern des Verfahrens ist eine multiple, lineare Regression der Leistungen der Versuchspersonen auf Basis deren Gruppenzugehörigkeiten. Die Hypothesen beziehen sich meist nicht auf zwei gegenüberzustellende Gruppen, sondern betreffen größtenteils mehrere Gruppen. Entsprechend sind die Gruppen nach bestimmten Kriterien zusammenzufassen. Zum Beispiel ist die Bündelung der Gruppen sinnvoll, die an einem Anwendungen umfassenden Unterricht teilgenommen haben. Ebenfalls ist es im Sinne der Hypothesen die Gruppen zu bündeln, die die Anwendung Geschwindigkeit im Unterricht behandelt haben. Die Leistungsdifferenzen der gebündelten Gruppen werden auf Signifikanz getestet.

Die Gestaltung der Kontraste ist aus mathematischen Gründen nicht beliebig, sondern unterliegt bestimmten Regeln. Die angestellten Vergleiche müssen orthogonal, also unabhängig voneinander sein, um die Prüfung der Signifikanz entsprechend unabhängig vornehmen zu können. Unter anderem bedeutet dies, dass bei vier Gruppen maximal drei orthogonale Vergleiche möglich sind. Dabei ist zu bemerken, dass die Relationen zwischen den Gruppen nicht transitiv[3] sind und somit am Ende der gerechneten Kontraste keine Reihenfolge der Gruppen steht, die weitere Gegenüberstellungen als die zu Beginn festgelegten Vergleiche zulässt.

Die Orthogonalität der Vergleiche wird in der Studie dadurch umgesetzt, dass stets alle Gruppen bis auf eine einzelne zusammengefasst werden und in nachfolgenden Vergleichen, die separierte Gruppe nicht mehr einbezogen wird (Field, 2005, Kap. 8.2.10). Die erste sinnvolle Bündelung von Gruppen ist naheliegend. Die Treatmentgruppen werden zusammengenommen und deren Leistung mit der der Baselinegruppe verglichen. Mit diesem ersten Kon-

[3]Aus den Relationen Gruppe x ist gleich Gruppe y und Gruppe y ist gleich Gruppe z lässt sich nicht schlussfolgern, dass auch Gruppe x der Gruppe z gleicht.

Abb. 6.2: Erster Kontrast für alle Skalen

trast werden folglich die Leistungen der Baselinegruppe und die mittleren Leistungen der Treatmentgruppen innerhalb der einzelnen Skalen auf signifikante Unterschiede geprüft, siehe Abb. 6.2. Der erste Kontrast macht somit eine Aussage über den generellen Lerneffekt durch den Unterricht an sich. Es wird kontrolliert, inwieweit der Nachtest auch durch Versuchspersonen lösbar ist, die nicht an einer der Lerneinheiten teilgenommen haben. Ein bestimmter Grad an intuitiver Nutzung der Pfeile ist vorstellbar und im Sinnes eines flexiblen Werkzeugs auch wünschenswert. Für die Untersuchung ist der Einfluss jedoch zu kontrollieren. Außerdem ist davon auszugehen, dass durch den Vortest in geringem Maße die Nutzung von Pfeilen in der Physik gelernt werden kann. Diese Fertigkeiten, die außerhalb der Treatments erworben wurden, werden durch den Punktwert der Baselinegruppe im Nachtest repräsentiert. Im nächsten Schritt werden die Leistungen der Gruppen sichtbar gemacht, die durch ihren Unterricht auf die jeweilige Anwendung der Pfeile spezialisiert sind. Das bedeutet, dass im Fall der Skala Abstrakt die Gruppe T0 den vereinten Gruppen T1 und T2 gegenüberzustellen ist. Erstgenannte Gruppe hat in der Lerneinheit ausschließlich mathematische Aspekte von Pfeilen behandelt, während sich die anderen beiden auch mit der Anwendung von Pfeilen auseinander gesetzt haben, siehe Abb. 6.3. Mit diesem zweiten Kontrast innerhalb der Skala Abstrakt wird sichtbar, welche Leistungen von den Versuchspersonen erbracht werden können, wenn sie nur über einen abstrakt-mathematischen Lernhintergrund verfügen. Bezogen auf die Skala Geschwindigkeit werden ebenfalls die Gruppen T0 und die gebündelten Gruppen T1 und T2 gegenübergestellt. T1 und T2 sollten aufgrund ihrer Erfahrungen mit Geschwindigkeitspfeilen bessere Leistungen zeigen. Da

Abb. 6.3: Zweiter Kontrast für die Skalen Abstrakt, Geschwindigkeit und Weitere

die Anwendung der Pfeile als Kraftpfeile nur der Gruppe T2 begegnet ist, ist der zweite Kontrast für die Skala Kraft anders zu festzulegen. Die Gruppen T0 und T1 werden vereint und deren mittlere Leistung mit der Leistung der Gruppe T2 verglichen, siehe Abb. 6.4. Nur die Gruppe T2 hat einen Unterricht mit Kraftpfeilen erfahren, entsprechend sollten diese im Umgang mit Kraftpfeilen erfolgreicher sein.

Für die verbleibende Skala Weitere, deren Pfeilanwendungen allen Gruppen unbekannt sind, begründet sich die Zusammenlegung der Gruppen für den zweiten Kontrast anders. Hier wird die Leistung der Gruppe T0 der mittleren Leistung der Gruppen T1 und T2 gegenübergestellt, siehe wieder Abb. 6.3. Dieser Kontrast steht für den Vergleich zwischen anwendungsfreiem und Anwendungen umfassenden Unterricht im Zusammenhang mit dem Transfer von Pfeilen in unbekannte Anwendungsbereiche. Es wird erwartet, dass ein Anwendungen umfassender Unterricht auch bei Aufgaben mit unbekannten Anwendungen zu besseren Leistungen führt. Um den Einfluss der Anzahl der behandelten Anwendungen zu prüfen, werden die Gruppen T1 und T2 bezüglich der Skala Weitere verglichen, die sich gerade in diesem Punkt unterscheiden, siehe Abb. 6.5. In ähnlicher Weise ist der dritte Kontrast im Zusammenhang mit der Skala Kraft angelegt, siehe Abb. 6.6. Denn die Kraft ist den Gruppen T0 und T1 als Pfeilanwendung nicht bekannt. Somit kann durch den Vergleich der Leistungen der beiden Gruppen eine Aussage über die Förderung des Verständnisses der Pfeile in unbekannten Anwendungsbereichen gemacht werden. Von untergeordneter Bedeutung sind die jeweils dritten Kontraste innerhalb der Skalen Abstrakt und Geschwindigkeit. In beiden Fällen werden die Gruppen T1 und T2 verglichen, siehe

Abb. 6.4: Zweiter Kontrast für die Skala Kraft

wieder Abb. 6.5. Ein Einfluss des Anwendungen umfassenden Unterrichts auf die abstrakte Leistung beziehungsweise auf die Leistung im Umgang mit den bekannten Geschwindigkeitspfeilen ist nicht zu erwarten.

6.3.2 Zusammenfassung und statistische Hypothesen

Das Design der Studie beinhaltet vier Gruppen, deren Leistungen durch einen vier Skalen umfassenden Nachtest erhoben werden. Die formulierten Hypothesen beziehen sich meist auf mehrere Gruppen und teilweise auf mehrere Skalen. Mit dem Verfahren der geplanten Kontraste lassen sich Gruppen zusammenfassen und auf Signifikanz ihrer Leistungsdifferenzen überprüfen. Die statistischen Hypothesen, also die konkrete Umsetzung der Hypothesen durch die Kontraste, werden im folgenden zusammengefasst.

Die Hypothese 1 zielt auf den allgemeinen Lerneffekt durch die Treatments. Um sie zu validieren, ist bezüglich jeder Skala die Leistung der Treatmentgruppen mit der Leistung der Baselinegruppe zu vergleichen. Der erste Kontrast prüft entsprechend den gemeinsamen Mittelwert der drei Treatmentgruppen und den Mittelwert der Baselinegruppe auf Signifikanz des Unterschieds.

$$\mathrm{H}_1: \ \mu_{\mathrm{T0} \cup \mathrm{T1} \cup \mathrm{T2}} > \mu_{\mathrm{BL}} \quad \text{für alle Skalen}$$

(μ: Populationsmittelwert, Tx $\cup$ Ty: vereinte Gruppen Tx und Ty)
Die Hypothesen 2a und 2b beziehen sich auf die mathematisch-abstrakte Leistung. Es wird erwartet, dass die Gruppe T0 aufgrund ihrer Spezialisierung einen höheren Mittelwert bezüglich der Skala Abstrakt erreicht als die

Abb. 6.5: Dritter Kontrast für die Skalen Abstrakt, Geschwindigkeit und Weitere

Abb. 6.6: Dritter Kontrast für die Skala Kraft

beiden Gruppen T1 und T2. Mit dem zweiten Kontrast wird der Leistungsunterschied auf Signifikanz getestet.

$$\mathrm{H}_{2a}\colon\ \mu_{\mathrm{T0}} > \mu_{\mathrm{T1}\cup\mathrm{T2}} \quad \text{für Skala Abstrakt}$$

Da sich die beiden anwendungsorientierten Treatments nicht in ihrem Anteil an mathematischen Inhalten unterscheiden, sollten sich die Leistungen der entsprechenden Gruppen nicht unterscheiden.

$$\mathrm{H}_{2b}\colon\ \mu_{\mathrm{T1}} = \mu_{\mathrm{T2}} \quad \text{für Skala Abstrakt}$$

Die Hypothese 3a sagt aus, dass Aufgaben, in denen Pfeilanwendungen auftreten, die die Versuchspersonen aus dem Unterricht kennen, diesen auch entsprechend leichter fallen sollten. Gruppenvergleiche dieser Art sind zweimal vorhanden und es existieren entsprechend zwei statistische Hypothesen zu dieser Fragestellung. Bezüglich der Skala Geschwindigkeit wird der Mittelwert der Gruppen T1 und T2, die Geschwindigkeitspfeile kennen, dem Mittelwert von T0 gegenübergestellt. Für die Anwendung Kraft wird die Gruppen T2, die wiederum Kraftpfeile im Unterricht behandelt hat, mit den Gruppen T0 und T1 verglichen.

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_{3a}:\quad & \mu_{\mathrm{T0}} < \mu_{\mathrm{T1}\cup\mathrm{T2}} && \text{für Skala Geschwindigkeit}\\ & \mu_{\mathrm{T0}\cup\mathrm{T1}} < \mu_{\mathrm{T2}} && \text{für Skala Kraft}\end{aligned}$$

Aufgrund der gleichen Argumentation sollten sich Gruppen, denen die Pfeilanwendung der Skala bekannt sind, nicht unterscheiden. Die entsprechende Hypothese 3b wird mit dem dritten Kontrast innerhalb der Skala Geschwindigkeit getestet. Beide Gruppen T1 und T2 kennen Geschwindigkeitspfeile aus dem Unterricht

$$\mathrm{H}_{3b}\colon\ \mu_{\mathrm{T1}} = \mu_{\mathrm{T2}} \quad \text{für Skala Geschwindigkeit}$$

Die verbleibenden Hypothesen betreffen den Transfer von Wissen in unbekannte Anwendungsbereiche. Nach der Hypothese 4a sollten Versuchspersonen, die an einem Unterricht mit Anwendungen teilgenommen haben, Pfeile auch dann zur Darstellung physikalischer Größen nutzen können, wenn ihnen speziell diese Größe bisher nicht als Pfeilanwendung begegnet ist. Die Skalen Kraft und Weitere sind dabei von Bedeutung. Die Gruppen T1 und T2 sollten bessere Leistungen im Zusammenhang mit ihnen neuen Anwendungen zeigen als die Gruppe T0. Genauso sollte innerhalb der Skala Kraft die Gruppe T1 erfolgreicher sein als die Gruppe T0.

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_{4a}:\quad & \mu_{\mathrm{T1}\cup\mathrm{T2}} > \mu_{\mathrm{T0}} && \text{für Skala Weitere}\\ & \mu_{\mathrm{T1}} > \mu_{\mathrm{T0}} && \text{für Skala Kraft}\end{aligned}$$

Die Prüfung der Hypothese 4a durch zwei Kontraste ist nicht perfekt, da es nicht ausgeschlossen ist, dass sich nur eine der beiden Relationen bewahrheitet. In diesem Fall ist die Hypothese weder validiert noch falsifiziert. Außerdem ist zu bemerken, dass die Vergleiche zwar Anwendungen umfassenden und anwendungsfreien Unterricht gegenüberstellen, dass jedoch im ersten Fall Probanden involviert sind, die zwei Pfeilanwendungen behandelt habe, während im zweiten Fall nur Probanden aus der Gruppe T1 einbezogen werden können, die nur von einer Pfeilanwendung Kenntnisse besitzen. Das Design der Studie ist in der Hinsicht nicht perfekt. Eine Lösung ist jedoch prinzipiell nur dadurch möglich, dass bestimmte Kontraste von vornherein nicht zur Hypothesenprüfung herangezogen werden.

Die Hypthese 4b betrifft die Leistungen der Gruppen T1 und T2, die beide an Anwendungen umfassendem Unterricht teilgenommen haben. Die Gruppe T2 sollte von ihrem Wissen um verschiedene Pfeilanwendungen profitieren und im unbekannten Anwendungsbereich der Skala Weitere erfolgreicher sein.

$$\mathrm{H}_{4\mathrm{b}}:\ \mu_{\mathrm{T2}} > \mu_{\mathrm{T1}} \quad \text{für Skala Weitere}$$

Kapitel 7

Treatments

Für die Untersuchung sind drei Lerneinheiten zu je viermal 45 Minuten entwickelt worden, die das Konzept der Vektorpfeile vermittelt. Die Anzahl der behandelten Pfeilanwendungen ist der variierte Parameter. Weitere Parameter sind entsprechend konstant zu halten. So ist zum Beispiel zu vermeiden, dass im Treatment mit vielen Anwendungen viele Experimente durchgeführt werden, während im Treatment Abstrakt keine Experimente auftauchen. Auch die Anteile an Frontalunterricht und Gruppenarbeit sind zu kontrollieren. Um die Parallelität der Unterrichtsform weitestgehend umzusetzen, sind die Lerneinheiten in einem Raster von ungefähr zehn Minuten geplant worden. Der Ablauf der Lerneinheiten ist zum überwiegenden Teil der gleiche. In Summe sind die Anteile an Instruktions-, Experimentier- und Übungszeiten in allen drei Einheiten gleich ausgelegt. In der Abb. 7.1 ist eine kompakte Übersicht der Unterrichtsplanung dargestellt, im Anhang B ist ein detaillierter Ablauf zu finden. Erwartungsgemäß konnte dieser Plan in dieser Genauigkeit im Schulgeschehen nicht umgesetzt werden. Die Erfahrung hat jedoch gezeigt, dass die detaillierte Strukturierung hilfreich war, den Ablauf der Unterrichtsstunden in befriedigendem Maße parallel umzusetzen.

Die ersten beiden Unterrichtstunden widmen sich der Nutzung von Pfeilen im physikalischen beziehungsweise mathematischen Kontext. In der dritten und vierten Stunde liegt der Schwerpunkt auf der Addition von Pfeilen. Der Unterricht der ersten und dritten Stunde ist durch Vorführexperimente geprägt, während in der zweiten und vierten Stunde Übungsaufgaben bearbeitet und besprochen werden. Alle Unterrichtsstunden sind weitestgehend frontal unterrichtet worden, da eine Interaktion der Versuchspersonen in Gruppenarbeiten nicht im Sinne der Studie ist. Aus gleichem Grund ist auf Hausaufgaben weitestgehend verzichtet worden. Es sei an dieser Stelle betont, dass es sich bei dem durchgeführten Unterricht um Treatments einer experimentellen Studie handelt und nicht um einen Unterrichtsvorschlag für

	Experimente zum Vektor-charakter	Aufgaben	Experimente zur Addition	Aufgaben
Abstrakt	Rechnen mit Pfeilen	Addition	Kommutativ- & Assoziativ-Gesetz	Addition & Subtraktion
Eine Anwendung	Geschw. mit Pfeilen darstellen	Betrag & Richtung	Experimente zur Addition	Addition
Zwei Anwendungen	Geschw. & Kraft mit Pfeilen darstellen	Betrag & Richtung	Experimente zur Addition	Addition

Abb. 7.1: Übersicht über die vier Unterrichtsstunden für alle Treatmentgruppen

die Schule. Aus den Erfahrungen mit den Lerneinheiten lassen sich eventuell Empfehlungen für den Schulunterricht ableiten. Es ist jedoch der Kern des Vorhabens, den Einfluss der Lerneinheiten, die sich in nur einem Charakteristikum unterscheiden, auf die Leistung der Probanden zu analysieren.

7.1 Treatment T1 mit einer Pfeilanwendung

In der Lerneinheit T1 wird die geometrische Vektorrechnung anhand von Geschwindigkeitspfeilen gelehrt. Im Unterricht wird ausschließlich mit Geschwindigkeitspfeilen gearbeitet und die Darstellung von Bewegungen durch Geschwindigkeitspfeile und deren Addition behandelt. Der Einstieg in der ersten Unterrichtsstunde geschieht über eine Diskussion. Verschiedene Möglichkeiten der Darstellung schneller und langsamer Bewegungen durch Pfeile werden zusammengetragen. Verschiedene bewegte Objekte wie ein Skateboardfahrer und eine Schaumstoffrakete werden betrachtet. Verschiedene Ausführungen eines Geschwindigkeitspfeils werden besprochen und bewertet. Beispiele sind die Variationen der Form und der Farbe des Pfeilschaftes oder der Pfeilfeder. Die Darstellung des Geschwindigkeitsbetrags durch die Länge des Pfeils lässt sich durch die einfache Handhabung und die Möglichkeit der stufenlosen Variation begründen.

Nach diesem qualitativen Einstieg wird die Geschwindigkeit einer Modell-

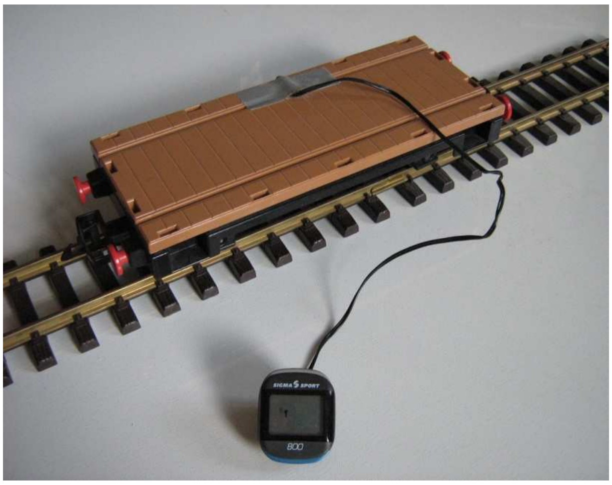


Abb. 7.2: Modelleisenbahn mit integriertem Tachometer

Abb. 7.3: Geschwindigkeitslineal zur Vermessung von gezeichneten Pfeilen

eisenbahn in verschiedenen Szenarien mithilfe eines eingebauten Tachometers gemessen, siehe Abb. 7.2. Die Richtung der Bewegung ergibt sich in diesem Fall aus den gelegten Gleisen. Die Geschwindigkeitspfeile lassen sich auf einem Blatt Papier neben den Gleisen nach der Festlegung eines Maßstabs zeichnen. Anschließend werden Abbildungen verschiedener bewegter Objekte mit dem Tageslichtprojektor präsentiert und das Erstellen der Geschwindigkeitspfeile wiederholt. Ein Lineal, auf dem die Zuordnung zwischen der Geschwindigkeit in Kilometern pro Stunde und der Pfeillänge in Zentimetern bereits vorgenommen ist, erleichtert das Zeichnen der Pfeile, siehe Abb. 7.3. Durch dieses Lineal soll die Darstellung des Geschwindigkeitsbetrags durch eine Länge hervorgehoben werden. Anschließend werden verschiedene Szenarien anhand kleiner Objekte wie Spielzeugautos besprochen. Kreisförmige Bewegungen mit konstantem Betrag und geradlinig beschleunigte Bewegungen tauchen auf. Abschließend werden auf einem Merkblatt die Konventionen der Pfeildarstellung der Geschwindigkeit zusammenfassend dargestellt.

In der zweiten Unterrichtsstunde werden Übungsaufgaben von den Schülerinnen und Schülern bearbeitet. Geschwindigkeitspfeile sind zu vermessen beziehungsweise zu zeichnen. Auf dem zweiten Übungsblatt ist das Szenario eines Wettrennens mit Geschwindigkeitspfeilen darzustellen, siehe Abb. 7.4. Die Lösungen und typische Fehler werden im Anschluss an die jeweiligen Aufgaben besprochen.

In der dritten Unterrichtsstunde wird die Addition von Geschwindigkeitspfeilen exemplarisch mit Experimenten entwickelt. Aus technischen Gründen ist es nicht möglich, in einem Experiment Geschwindigkeitsbeträge und -richtungen von verschiedenen Objekten in unterschiedlichen Bezugsystemen direkt zu messen. Der Umweg über den zurückgelegten Weg führt zu reproduzierbaren Ergebnissen. Mit einer Stoppuhr wird eine feste Zeitspanne von fünf Sekunden vorgegeben, in der sich die batteriebetriebenen Wagen mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Die Wagen sind mit Stiften versehen und zeichnen so den in den fünf Sekunden zurückgelegten Weg auf die Tischplatte, siehe Abb. 7.5 und 7.6. Vor dem Experiment wird mit den Schülerinnen und Schülern die Äquivalenz von zurückgelegter Weglänge und Geschwindigkeitsbetrag besprochen. Verschiedene Szenarien der Addition von Geschwindigkeiten können experimentell beobachtet werden, indem ein Wagen auf einer bewegten Plattform fährt. Der Stift des Wagens zeichnet dabei stets auf die Tischplatte und macht somit den resultierenden Weg messbar.

Im ersten Szenario bewegen sich die Plattform und der Wagen in die gleiche Richtung, im zweiten Fall in entgegengesetzte Richtungen und abschließend rechtwinklig zueinander. Abgesehen vom ersten Fall ist der Ausgang der Experimente für einige Schülerinnen und Schüler durchaus überraschend. Anhand der vom Wagen gezogenen Linien lassen sich Geschwindigkeitspfeile zeichnen und die Addition durch das Polygonzugverfahren plausibel machen. Auf einem Merkblatt wird die Handlungsvorschrift für die Addition von Geschwindigkeitspfeilen gebündelt und fixiert. Als Hausaufgabe sind von den Schülerinnen und Schülern einfache Aufgaben zur Addition von Pfeilen zu bearbeiten, die in der vierten Unterrichtsstunde besprochen werden. Weitere Übungsaufgaben mit steigendem Schwierigkeitsgrad werden ebenfalls in der letzten Stunde bearbeitet und besprochen.

7.2 Treatment T2 mit zwei Pfeilanwendungen

Die Lerneinheit T2 ist der Einheit T1 sehr ähnlich. Parallel zur Geschwindigkeit wird die Kraft als Pfeilanwendung thematisiert. Um das vorgegebene Zeitbudget trotz des zusätzlichen Aspekts einzuhalten, werden die Experimente um Variationen gekürzt und Übungsaufgaben zur Geschwindigkeit durch Kraftaufgaben ersetzt. Im Zusammenhang mit den Einführungsexperi-

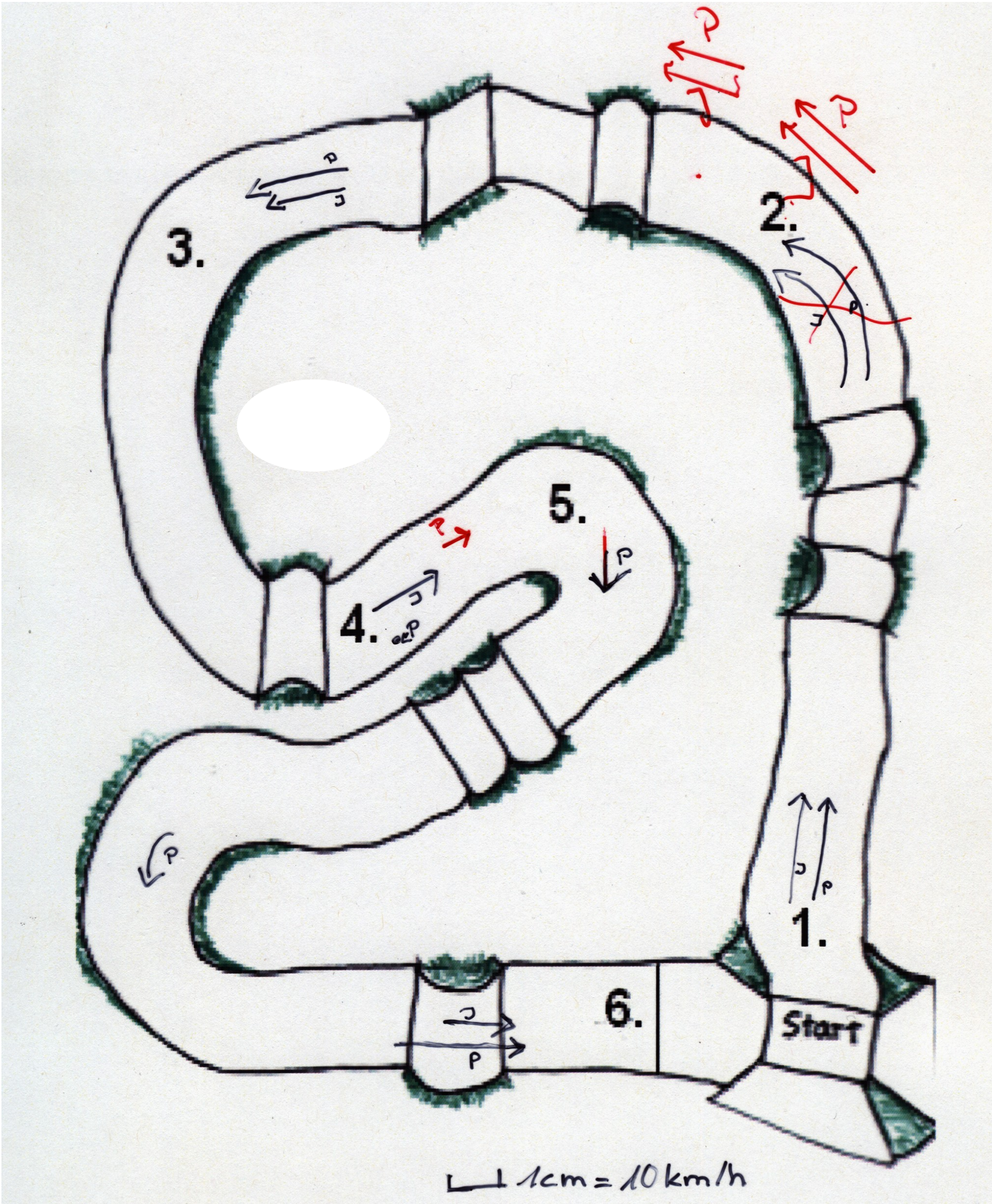


Abb. 7.4: Bearbeitete Übungsaufgabe „Das Wettrennen“ mit Korrekturen

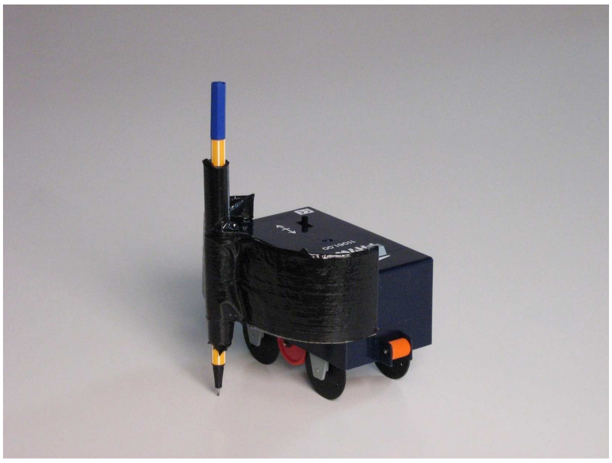


Abb. 7.5: Experimentierwagen mit Stift

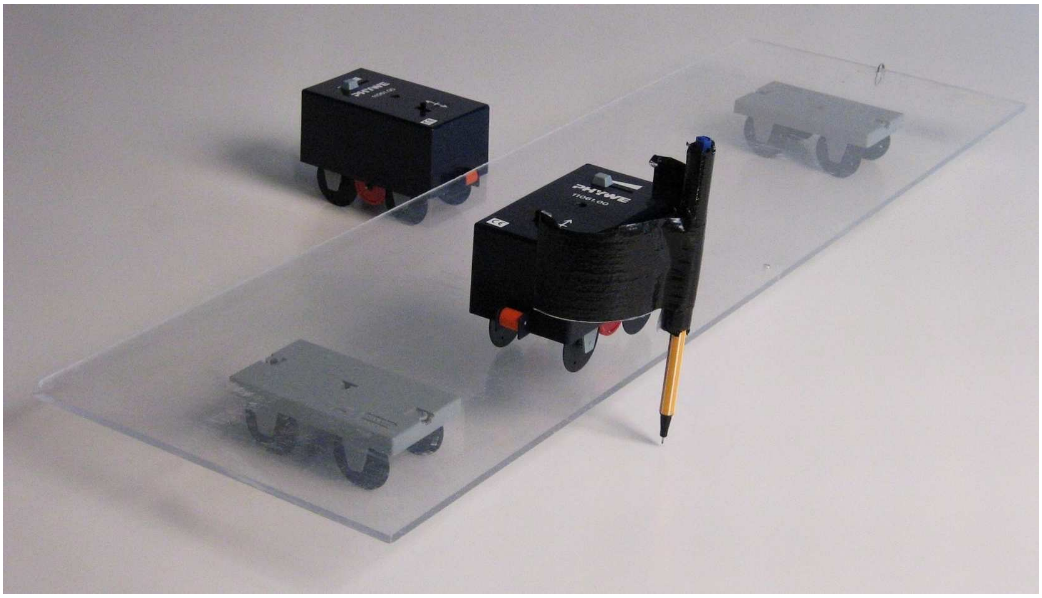


Abb. 7.6: Der Experimentierwagen schreibt auf die Tischplatte. Die Plattform wird von einen zweiten Wagen geschoben.

menten und Übungsaufgaben lässt sich dies problemlos umsetzen. Die Durchführung der Experimente zur Addition von Geschwindigkeits- und Kraftpfeilen innerhalb einer Unterrichtsstunde ist gedrängt.

Wie in der Unterrichtseinheit T1 wird zu Beginn der ersten Unterrichtsstunde die Darstellung von Bewegungen durch Pfeile diskutiert. Im direkten Anschluss werden die Tätigkeiten Ziehen und Drücken in überschaubaren, lebensnahen Szenarien wie Tauziehen durch Pfeile beschrieben. Die Unterrichtsphase endet mit dem Resümee, dass sich die Beträge von Geschwindigkeit und Kraft am besten durch Pfeile unterschiedlicher Länge beschreiben lassen. Anschießend werden am Tageslichtprojektor Geschwindigkeiten und Kräfte in unterschiedlichen Situationen besprochen und die Pfeillängen mit einem Geschwindigkeits- beziehungsweise Kraftlineal bestimmt. Die Betrachtung der Bewegung der Modelleisenbahn schließt sich wie in der Lerneinheit T1 an. Anstelle der Beobachtung von beschleunigten Bewegungen folgt als Thema die Bestimmung von Kräften mit dem Kraftmesser und deren Darstellung durch Pfeile. Mit einem Merkblatt, das die Konventionen der Pfeildarstellung von Geschwindigkeit und Kraft zusammenfasst, endet die Stunde.

In der zweiten Stunde werden Übungsaufgaben zu Geschwindigkeits- und Kraftpfeilen von den Schülerinnen und Schülern bearbeitet. Die Anwendungen der Pfeile sind dabei von Aufgabe zu Aufgaben verschieden.

In der dritten Unterrichtsstunde ist die Addition von Geschwindigkeits- und Kraftpfeilen Thema. Die Experimente zur Geschwindigkeit mit den batteriebetriebenen Wagen sind im Umfang reduziert, um auch Untersuchungen zur Kraft vornehmen zu können. So werden die Varianten der gleich- beziehungsweise entgegenrichteten Bewegungen von Wagen und Plattform nur beobachtet und die Geschwindigkeitspfeile lediglich qualitativ notiert. Die zueinander rechtwinklige Bewegung des Wagens und der Plattform wurden wie in der Einheit T1 detailliert analysiert. Anschließend werden statische Experimente mit Kraftmessern durchgeführt. Aus der Ausrichtung der Kraftmesser und dem angezeigten Kraftbetrag lassen sich Summanden und Summe als Pfeile bestimmen, siehe Abb. 7.7. Mit einem Merkblatt zur Addition von Geschwindigkeits- und Kraftpfeilen schließt die Stunde. Die Hausaufgabe umfasst die Aufgaben zur Geschwindigkeit und zur Kraft. In der vierten Stunde werden die Übungsaufgaben besprochen und weitere bearbeitet, siehe Abb. 7.8.

7.3 Treatment T0 ohne Pfeilanwendungen

Im Vergleich zu den bisher dargestellten Unterrichtseinheiten ist das Treatment T0 deutlich anders, da ein physikalischer Kontext fehlt. Es sind ent-

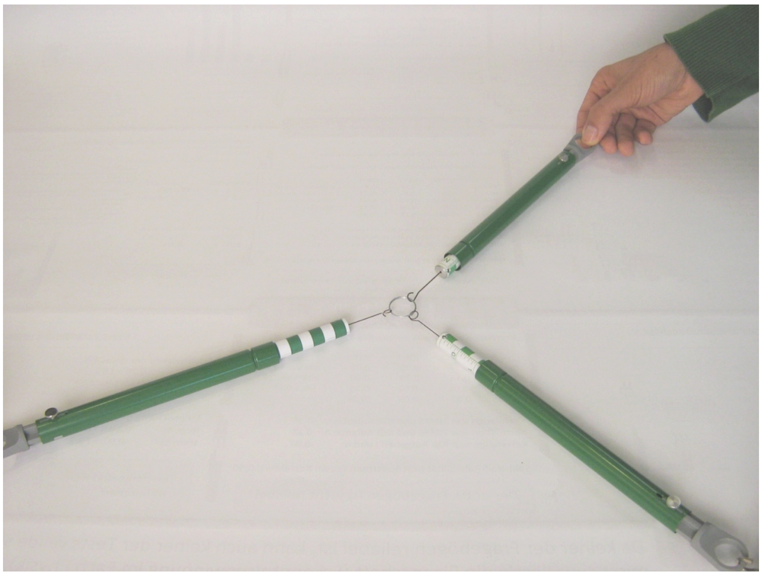


Abb. 7.7: Summation von Kräften im Experiment

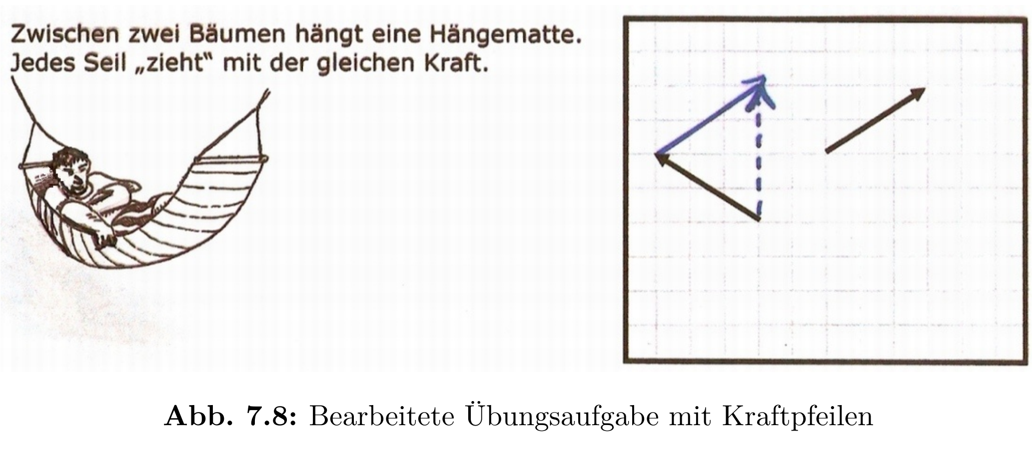


Abb. 7.8: Bearbeitete Übungsaufgabe mit Kraftpfeilen

sprechend keine Experimente durchführbar, anhand derer sich die Addition von Pfeilen entwickeln lässt. Über den Zahlenstrahl ist es jedoch möglich, eine Beziehung zum Zahlenraum herzustellen. Die Addition von Pfeilen lässt sich somit in ähnlicher Weise aus dem „Verhalten“ positiver und negativer Zahlen exemplarisch entwickeln wie aus den Experimenten der anderen Unterrichtseinheiten. Während der Experimentierphasen der physikalisch orientieren Einheiten werden in der mathematischen Lerneinheit diese erkundenden Betrachtungen der Pfeile anhand des Zahlenstrahls vorgenommen. Jedoch ist die Darstellung einer Zahl auf dem Zahlenstrahl durch einen Pfeil derart simpel, dass im Unterricht von Anfang an die Addition von Pfeilen in den Mittelpunkt gestellt wird und später die Eigenschaften der Addition sowie die Subtraktion von Pfeilen behandelt werden. Die Übungsaufgaben zur Zeichenkonvention von Pfeilen und zur Addition lassen sich zu weiten Teilen aus den anderen Treatments übernehmen, indem an Stelle eines Geschwindigkeitsbetrags der Pfeilbetrag als Zahlenwert zu bestimmen ist.

Die erste Stunde beginnt mit einer Sammlung von unterschiedlich gezeichneten Pfeilen. Verschiedene Eigenschaften eines Pfeils, wie Farbe, Ausrichtung und Gestalt werden diskutiert. Die Pfeillänge und -ausrichtung werden als kontinuierliche Größen hervorgehoben und als besonders praktikable Eigenschaft erkennbar gemacht. Das Rechnen auf dem Zahlenstrahl wird besprochen. Die Addition von Pfeilen im Zusammenhang mit positiven und negativen Zahlen wird betrachtet. Im Folgenden wird die Addition von Pfeilen in einem zweidimensionalen Koordinatensystem thematisiert. Es wird geprüft, ob die Addition wie im eindimensionalen Fall durch das Aneinanderfügen der Pfeile funktioniert. Dazu wird eine komponentenweise Darstellung der Pfeile verwendet. Das Additionsverfahren wird abschließend auf einem Merkzettel zusammengefasst. Die Verschiebbarkeit der Pfeile ist bis dahin nicht thematisiert worden, und wird später explizit als wesentliche Eigenschaft besprochen.

In der zweiten Unterrichtsstunde wird das korrekte Zeichnen und Addieren von Pfeilen geübt und die Äquivalenz von gleich ausgerichteten, gleich langen Pfeilen besprochen. Verschiedene Aufgaben mit irritierenden Konstellationen der Pfeile, wie sich kreuzenden oder an den Spitzen zusammenliegenden Pfeilen, werden bearbeitet. Auf einem Merkblatt wird die Prozedur der Addition der Pfeile nach dem Polygonzuverfahren inklusive der Verschiebung zusammengefasst.

In der dritten Stunde wird die Kommutativität und Assoziativität für die Addition mehrerer Pfeile exemplarisch erkundet. Es zeigt sich, dass das Vertauschen der Summanden stets zum gleichen Ergebnispfeil führt, der nur in seiner Position variiert. Des Weiteren werden der Nullvektor und der Gegenpfeil als neutrales beziehungsweise inverses Element der Addition durch einen Vergleich zum Zahlenraum entwickelt. Anders als in den physikalischen Treatments werden in der zweiten Hälfte der dritten Stunde neben dem quasiexperimentellen Teil auch Übungsaufgaben bearbeitet. In der vierten Stunde wird nach der Besprechung der Hausaufgaben die Subtraktion aus der Addition entwickelt. Dies geschieht wieder in probierender, erkundender Weise über die Addition negativer Zahlen. Damit bleiben in der Bilanz die Zeitanteile an Quasi-Experimentier- und Übungsphasen gleich.

Kapitel 8

Tests

Das Design der Studie sieht einen Vortest zur Kontrolle der Gruppengleichheit und einen Nachtest zur Erhebung der Leistungen nach den Lerneinheiten vor. Im Anhang C sind die Fragebögen beider Tests bis auf den kommerziellen Intelligenztest und die Zuordnungen der Items zu den jeweiligen Skalen zu finden. Durch einen anonymen Code sind Vortest und Nachtest einer Versuchsperson einander zugeordnet.

8.1 Vortest

Die Bearbeitungszeit des Vortests beträgt 35 Minuten, damit dieser nach einer zehnminütigen Begrüßungs- und Einführungsphase innerhalb der ersten Unterrichtsstunde eingesetzt werden kann. Entsprechend erfasst der Vortest nur wenige ausgewählte Aspekte der mathematischen und physikalischen Leistung der Versuchspersonen. Sprachliche Komponenten konnten nicht berücksichtigt werden. Um mathematische Komponenten der kognitiven Leistungsfähigkeit zu erheben, sind zwei Subskalen des „Kognitiven Fähigkeitstests 4-12 +R“ (KFT) ausgewählt worden (Heller und Perleth 2000, siehe Studien von Slančík et al. 2006; Brell et al. 2006; Gromadecki et al. 2007). Für beide Teile werden insgesamt 24 Minuten inklusive Instruktion benötigt. Jede Skala umfasst 25 Items. In der Studie wie auch der Vorstudie ist sowohl für die achten und neunten Klassen der KFT für die neunte Klasse benutzt worden.[1] Zu Beginn der Hauptstudie stand nicht fest, ob neben den achten auch neunten Klassen für die Untersuchung herangezogen werden. Da es sich um gymnasiale Schulklassen handelt, diese also im oberen Bereich der Testskalen liegen, fiel die Entscheidung zugunsten eines anspruchsvolleren

[1] Durch Änderungen des Rahmenlehrplans war die Mechanik zur Zeit der Studie sowohl in der achten als auch neunten Klasse Unterrichtsinhalt.

Tests aus. Dies ist im Rahmen der Benutzungsvorschriften des KFT möglich (Heller und Perleth, 2000, Kap. 1.4.4.2).

Aus dem sogenannten „quantitativen Teil“ des KFT ist die Skala „Q1 Mengenvergleich“ entnommen. Verschiedene Mengen, mathematische Terme, Flächen und Winkel geometrischer Figuren sind von den Versuchspersonen zu vergleichen. Die Aufgaben entsprechen den für die Schule üblichen Aufgabenstellungen. Die Skala „N2 Figurenanalogien“ aus dem „nonverbalen Teil“ zielt auf logisches Denken im Zusammenhang mit geometrischen Figuren. Es sind Symbole zu finden, die durch ein bestimmte Eigenschaft in Beziehung zueinander stehen. Es besteht die Vermutung, dass Fähigkeiten im Umgang mit geometrischen Figuren auch für die Nutzung von Pfeilen von Wichtigkeit sind.

Neben der Intelligenz bestimmt das fachspezifische Vorwissen die Leistungen der Versuchspersonen wesentlich (Wild et al. 2006; Weinert 1996; speziell zur Mathematik: Stern 2003; Neubauer und Stern 2007). Entsprechend werden im Vortest die Fähigkeiten im Umgang mit Vektorpfeilen und das Vorwissen zu ausgewählten Aspekten der Physik erhoben. Für die Untersuchung ist ein zehnminütiger Multiple-Choice-Test aus achtzehn Items zusammengestellt worden. Die Items sind zum größten Teil in Anlehnung an bekannte Items konstruiert. Drei Items sind der TIMS-Studie entnommen (Third International Mathematics and Science Study, Baumert et al. 1998, weitere Angaben, siehe Anhang C.1). Sechs der achtzehn Items betreffen Vektorpfeile ohne physikalische Anwendung. Es wird nach Betrag und Ausrichtung der Pfeile und nach der Addition beziehungsweise Subtraktion von Pfeilen gefragt. In acht Items tauchen Pfeile mit einer physikalischen Anwendung auf. Die Darstellung von Ort, Verschiebung, Geschwindigkeit und Kraft und deren Addition sind Gegenstand der Fragen. Vier Items betreffen physikalisches Wissen im Zusammenhang mit der Mechanik.

Zur Bewertung der entwickelten Fragebögen und zur Erprobung der Treatments ist im Vorfeld in drei neunten Klassen und einer achten Klasse eine Pilotstudie durchgeführt worden (Frühjahr 2007, n=102, siehe Boczianowski und Schön 2008). Im Rahmen des Mechanikunterrichts der neunten Klassen sind die Treatments durchgeführt worden. Die achte Klasse ist als Baselinegruppe herangezogen worden.[2] Die Selektion der Items nach der Itemanalyse war nicht problemlos, da eine große Anzahl von Items nicht den Anforderungen nach Schwierigkeit und Trennschärfe entsprach. Der Vortest ist durch weitere TIMSS-Items und Items aus dem Nachtest ergänzt worden. Dazu wurden die Items ausgewählt, die bezüglich der Baselinegruppe, also

[2]Die Mischung der Jahrgänge hatte organisatorische Gründe. Der Altersunterschied ist für die Vorstudie von untergeordneter Rolle.

ohne Einfluss der Lerneinheiten, den Gütekriterien entsprachen.

Neben der Erhebung der Schülerleistungen sind in der Hauptstudie die Lehrerinnen und Lehrer nach den bereits im Physikunterricht behandelten Themen und den verwendeten Schulbüchern des aktuellen und vorangegangenen Schuljahres befragt worden. So lassen sich mit geringem Aufwand Hinweise auf den Einfluss des Schulunterrichts auf die Ergebnisse der Studie erhalten.

8.2 Nachtest

Der Nachtest umfasst 56 Items im Multiple-Choice Format und ist in 45 Minuten von den Probanden zu bearbeiten. Jedes Item ist einer der vier Skalen Abstrakt, Geschwindigkeit, Kraft oder Weitere zugeordnet. Der Test und die Zuordnungen der Items zu den jeweiligen Skalen ist im Anhang C.2 zu finden. Die eigens für die Untersuchung konstruierten Items des Nachtests sind ebenfalls in der oben genannten Vorstudie analysiert worden. Die Verwendung von bereits bestehenden Items war nicht möglich, da diese bis auf wenige Ausnahmen das Verständnis der newtonschen Mechanik und nicht der Vektorpfeile testen (siehe S. 68). Die Vorstudie zeigte, dass der Test insgesamt zu einfach und stellenweise wenig trennscharf war (wieder Boczianowski und Schön, 2008). Problematische Items sind in der Itemselektion entfernt worden. Bei schwierigen Items wurde eine geringe Trennschärfe in Kauf genommen, da auf diese nicht verzichtet werden konnte. Um die entstandenen Lücken zu füllen, sind in Anlehnung an funktionelle Items neue Items mit veränderten Pfeilanwendungen generiert worden. An anderer Stelle wurden Missverständlichkeiten in der Formulierung und Darstellung korrigiert.

Die Skala Abstrakt umfasst zwölf Items, die in Anlehnung an Jung et al. (1977); Reif und Allen (1992); Wodzinski (1996); Nguyen und Meltzer (2003); Kanim et al. (2004); Shaffer und McDermott (2005) und Wilhelm (2005) erstellt wurden. Die Fragen umfassen Vergleiche, die zeichnerische Addition und Subtraktion von Pfeilen. Ein Beispiel ist in Abb. 8.1 gezeigt. Die Skalen Geschwindigkeit und Kraft bestehen aus jeweils 16 Items. Die Pfeile sind von den Versuchspersonen zur Darstellung der jeweiligen Größe zu nutzen, zu vergleichen und zu addieren, siehe Abb. 8.2 und 8.3. Die letzte Skala Weitere umfasst zwölf Items. Die dargestellten Größen sind der Ort in vier und die Verschiebung in fünf Items, siehe Abb. 8.4. Die Beschleunigung und der Stoß tauchen in je einem Item auf. Außerdem existiert ein Item, in dem keine sinnvolle Darstellung durch Pfeile möglich ist, um eine mögliche Übergeneralisierung zu testen.

4
In welcher Abbildung ist der Ergebnispfeil am längsten, wenn man die Pfeile addiert?

Kreuze an:

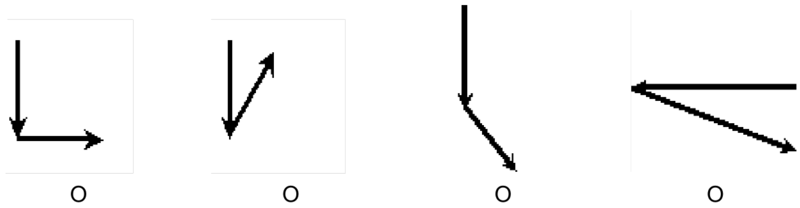


Abb. 8.1: Item der Skala Abstrakt (leicht geändertes Layout)

16
Ein rotes Auto überholt ein blaues Auto. Die Geschwindigkeiten der Autos sind rechts durch Pfeile darstellt. Welche Abbildung beschreibt die Situation richtig?

Kreuze an:

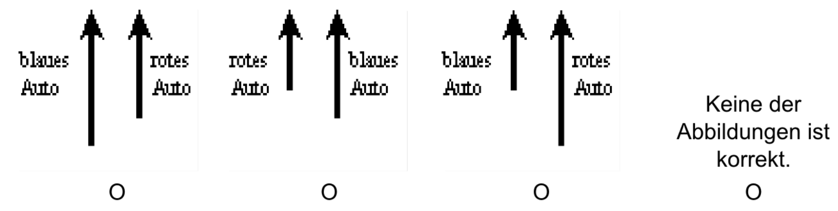
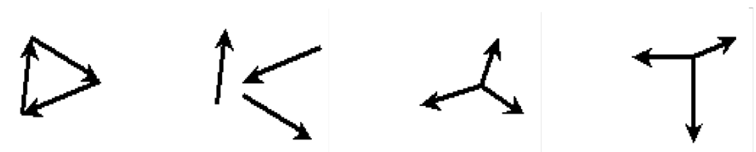


Abb. 8.2: Item der Skala Geschwindigkeit (leicht geändertes Layout)

32
Die Leinen von drei Hunden haben sich verknotet. Die Hunde ziehen in verschiedene Richtungen, aber keiner der Hunde kommt vom Fleck. Die Kräfte lassen sich durch Pfeile darstellen. Welche Zeichnung ist falsch?

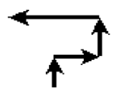
Kreuze an:



O O O O

Abb. 8.3: Item der Skala Kraft (leicht geändertes Layout)

9
Moritz schiebt einen Sessel mehrmals hin und her. Die Verschiebungen sind mit Pfeilen dargestellt. Welcher Pfeil stellt die Verschiebung dar, mit der Moritz den Sessel mit einem Mal hätte verschieben können?



Kreuze an:

O O O O

Abb. 8.4: Item der Skala Weitere zur Verschiebung (leicht geändertes Layout)

Kapitel 9

Durchführung und erste Eindrücke

9.1 Gruppenzusammensetzung, Unterrichtsablauf und Lernbiografien

Die Hauptstudie fand in insgesamt elf achten Klassen an drei Berliner Gymnasien im Herbst 2007 statt. In jeder Schule sind alle drei Treatments durch den Autor unterrichtet worden. Die Vergleichsgruppe setzt sich aus zwei Klassen zusammen, da die dritte Schule lediglich über drei achte Klassen verfügte. Es wurde verworfen, eine Vergleichsklasse einer weiteren Schule hinzuzuziehen, da diese Schule entsprechend nicht in den Treatments vertreten gewesen wäre und somit die Ausgeglichenheit an schulabhängigen Randbedingungen verschlechtert hätte.

In der Tabelle 9.1 sind die Zuordnungen der Klassen zu den Gruppen, die Anzahl der Versuchspersonen pro Gruppe und pro Schule nach der Bereinigung der Daten dargestellt. In jeder der beteiligten Schulen wurde ein anderes Schulbuch im Physikunterricht benutzt (Mikelskis et al. 2006; Meyer und Schmidt 2006; Bredthauer et al. 2002). Da jedoch in jeder Versuchsgruppe Schülerinnen und Schüler jeder Schule zu nahezu gleichen Anteilen vertreten sind, sollte dies keinen entscheidenden Einfluss haben. Das Physikbuch „Dorn Bader Physik" (Bader und Oberholz, 2006), das verstärkt Pfeile verwendet, ist von keiner Schule eingesetzt worden.

Die von den Schulklassen bis dahin behandelten Themen des Physikunterrichts sind in der Tabelle 9.2 aufgeführt. Im vorangegangenen Schuljahr waren die Themen in allen Schulen sehr ähnlich. Von allen Klassen wurden die Inhalte „Vom inneren Aufbau der Materie" und „Wärme im Alltag" behandelt. In der Schule B wurde das Thema „Sehen und gesehen werden"

Schule	A				B				C			
Zeitraum	04.09.-12.09.07				27.09.-12.10.07				31.10.-9.11.07			Anzahl/
Klasse	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	Gruppe
Treatment												
T1	23				21				19			63
T2		17				19				17		53
T0			17				26				22	65
Baseline												
BL				18				27				45
Anzahl/Schule				75				93			58	226

Tab. 9.1: Anzahl der Versuchspersonen pro Schulklasse und Gruppe der Studie nach Bereinigung der Daten

bearbeitet, während in den Schulen A und C „Schwimmen, schweben, sinken“ behandelt wurde. Bei diesem Thema können vereinzelt Pfeile auftauchen, um die aus dem Schweredruck resultierenden Kräfte auf einen Körper darzustellen. Dieser, die Studie potenziell störende Einfluss ist auf alle Gruppen gleich verteilt, da in allen Gruppen Schülerinnen und Schüler mit der entsprechenden Lernbiografie vertreten sind. Im Fall von gleichartigem Unterricht würde sich dieser Einfluss folglich nicht bedeutsam auf die Untersuchung auswirken. Die Schülerinnen und Schüler der Schule B haben dieses Thema nicht kennen gelernt und sind somit von dieser möglichen Störung unbeeinflusst.

Im laufenden Schuljahr wurden in den Schulen B und C das für die Studie unkritische Thema „Ladungen trennen - Magnete ordnen“ behandelt. In der Schule A war „Körper bewegen“ Gegenstand des Unterrichts. Dies ist bedenklich, da die Schülerinnen und Schüler auf diesem Weg die Geschwindigkeit als skalare Größe und nicht als Vektor kennen gelernt haben. Die Definition der Geschwindigkeit als Pfeil erscheint den Schülerinnen und Schüler so als zusätzliches, womöglich unnötiges Konzept. Wieder bezöge sich eine mögliche negative Wirkung auf alle Klassen der Schule A und wäre somit über alle Gruppen gleichmäßig verteilt. Problematischer sind klassen- und dem zur Folge gruppenabhängigen Einflussfaktoren. So liegt für die Klassen der Schule A, die zu den Treatmentgruppen T1 und T2 gehören, das Thema „Schwimmen, schweben, sinken“ nicht soweit zurück, wie für die Klassen C und D, die der Gruppe T0 und der Baselinegruppe angehören. Aufgrund der dazwischenliegenden Sommerferien lässt sich jedoch vermuten, dass dieser Effekt im Vergleich zur Wirkung der Treatments gering ausfällt. Der unter

Schule	A		B	C
Klasse	A & B	C & D	alle	alle
vergangenes Jahr				
	P2 Aufbau Materie	**P1 Schwimmen, Sinken**	P2 Aufbau Materie	**P1 Schwimmen, Sinken**
	P3 Wärme - Energie	P2 Aufbau Materie	P3 Wärme - Energie	P2 Aufbau Materie
	P1 Schwimmen, Sinken	P3 Wärme - Energie	P4 Sehen	P3 Wärme - Energie
aktuelles Schuljahr				
	P6 Körper bewegen	**P6 Körper bewegen**	P7 Ladungen - Magnete	P7 Ladungen - Magnete

Tab. 9.2: Die von den Schulklassen im vorangegangenen Schulunterricht behandelten Themen

Umständen vorhandene Einfluss würde dazu führen, dass die Treatmentgruppen T1 und T2 besser bezüglich Fragen zu Kraftpfeilen abschneiden als aus den Treatments allein resultieren würde. Es sei an dieser Stelle vorweggenommen, dass kein entsprechender Leistungsunterschied zwischen der Gruppe T0 und der möglicherweise begünstigten Gruppe T1, die beide keine Kraftpfeile im Unterricht behandelt haben, in der Untersuchung sichtbar geworden ist, siehe S. 111. Über die Gruppe T2 kann in diesem Zusammenhang keine Aussage gemacht werden.

9.2 Subjektive Eindrücke

Im Folgenden werden einige subjektive Eindrücke bezüglich des Unterrichts in den verschiedenen Klassen wiedergegeben. Es wird dabei nicht der Anspruch einer wissenschaftliche Analyse erhoben, sondern es soll lediglich ein Einblick in den durchgeführten Unterricht und die Klassen gegeben werden, um Anhaltspunkte und Hinweise für die Diskussion der Messergebnisse zu geben.

Ein bedeutender Unterschied in der Durchführung an den jeweiligen Schulen ist die Anwesenheit der Fachlehrerinnen und -lehrer während der Unterrichtsstunden. In der Schule A sind alle Unterrichtsstunden ohne eine den

Schülerinnen und Schülern bekannte Lehrperson durchgeführt worden. Außerdem sind diese Stunden als Vertretungsstunden für verschiedene Unterrichtsfächer gehalten worden. Somit war für die Schülerinnen und Schüler kein Bezug zu ihrem Physik- oder Mathematikunterricht gegeben. Entsprechend war der Unterricht an Schule A teilweise unruhig und von Prozessen der Rollenfindung der beteiligen Personen negativ beeinflusst. In den anderen Schulen B und C ist der Unterricht durch die Präsenz der Lehrpersonen in das Schulgeschehen eingebunden gewesen.

Der Unterricht zur Geschwindigkeit der Gruppe T1 unterschied sich in den jeweiligen Schulen wesentlich. In der entsprechenden Klasse der Schule A existierten erhebliche Motivationsprobleme. Gleichzeitig war der Geschwindigkeitsbegriff den Schülerinnen und Schülern aus dem Physikunterricht bekannt und entsprechend hinderliche Vorstellungen zur Geschwindigkeit vorhanden. Außerdem ist die technische Umsetzung der Experimente nicht in gewünschtem Maße geglückt. Insgesamt ist die Klasse nicht entsprechend der Unterrichtsplanung vorangekommen, was zu einer komprimierten letzten Unterrichtsstunde führte. Der Unterricht zu Geschwindigkeitspfeilen der Schule B verlief nach Plan. Die durchgeführten Experimente waren von streuenden Ergebnissen geprägt, was zu einer Diskussion aber augenscheinlich nicht zu Verständnisproblem führte. In der Klasse der Schule C verlief das Treatment zur Geschwindigkeit ebenfalls problemlos. Ein spezielles Problem war jedoch, dass vier Versuchspersonen das Schuljahr wiederholten und bereits in der Baseline der Pilotstudie die Tests ausgefüllt hatten. In der Datenbereinigung sind diese Versuchspersonen entfernt worden.

In der Versuchsgruppe T2 mit den Unterrichtsthemen Geschwindigkeit und Kraft verlief der Unterricht in den Schulen A und B insgesamt sehr gut. Der Zeitplan wurde in der Schule A eingehalten und in der Schule B überraschenderweise schneller abgearbeitet. Insgesamt fiel diese Klasse durch hohe Aufmerksamkeit und Engagement positiv auf. Die Experimente zur Geschwindigkeit ließen sich in beiden Klassen sehr gut, zur Kraft wie vorhergesehen zeitlich gedrängt, durchführen. Schüleräußerungen in der Schule A zeigten, dass die Kraftpfeile aus dem Kontext des Auftriebs präsent waren, der vor den Sommerferien thematisiert worden war. In der Schule C war der Unterricht zu Geschwindigkeit und Kraft von Problemen des aktuellen Schulgeschehens beeinflusst, was zu Unterbrechungen und Diskussionen mit dem Fachlehrer führte.

Das mathematische-abstrakte Treatment verlief in den drei Klassen der Gruppe T0 problemlos. Teilweise zeigten sich die Klassen unterfordert. Das Thema der Pfeile und deren Addition inklusive Vertauschungsgesetzen fiel den Schülerinnen und Schüler leicht. Der durch Zahlenstrahl und Koordinatensystem hergestellte Zusammenhang zwischen Pfeilen und Zahlen erschien anspruchsvoller. Die Klasse der Schule C hatte Pfeile vor den Sommerferien im Mathematikunterricht im Kontext von negativen Zahlen kennen gelernt und konnte sich darauf beziehen. Die Durchführung der Tests verlief in allen Klassen angemessen. In der Klasse der Baselinegruppe an Schule A kam es teilweise zu sichtbaren Verweigerungen. Da die Schülerinnen und Schüler weder über ein Treatment noch über den Schulunterricht mit den Pfeilen vertraut waren, besaßen die beiden Tests für die Schülerinnen und Schüler keine große Bedeutung.

Wie für eine Feldstudie abzusehen war, ist die Durchführung der Treatments und Tests nicht in dem Maße kontrolliert verlaufen, wie es im Falle einer Laborstudie zu erwarten gewesen wäre. Trotz der Differenzen im Unterrichtsablauf in den jeweiligen Klassen verlief die Umsetzung der Studie jedoch insgesamt in einem akzeptablen Rahmen. Eine Berücksichtigung aller Klassen für die Untersuchung ist sinnvoll und notwendig.

Kapitel 10

Ergebnisse

10.1 Ergebnisse des Vortests

Mit dem Vortest wird die Gleichheit der Gruppen zu Beginn der Untersuchung kontrolliert. Mit einer Varianzanalyse werden die Mittelwerte der vier Gruppen verglichen (siehe Kapitel 6). Zusätzlich werden die Punktwerte der einzelnen Skalen „Kognitive Fähigkeiten“ und „Vorwissen Physik und Pfeile“ auf Gleichheit getestet (siehe Kapitel 8). Zuvor wird ein Überblick über die Punktwerteverteilungen gegeben. Die Punktwerte sind in der gesamten Arbeit auf Eins normiert.

10.1.1 Punktwerteverteilung

Das Gesamttestergebnis des Vortests ist in Abb. 10.1 gezeigt.[1] Alle vier Gruppen liegen ziemlich zentral um den Wert 0,4. In der Gruppe T2 befinden sich zwei Versuchspersonen mit besonders guten Leistungen. Keine Versuchsperson stößt an die Grenzen der Gesamtskala. In den Abb. 10.2 und 10.3 sind die Punktwerteverteilungen getrennt für die Skalen „Kognitive Fähigkeiten“ und „Vorwissen Physik und Pfeile“ gezeigt. Wie zu erwarten, liegen die Punktwerte bezüglich der standardisierten Aufgaben des KFT, die für eine höhere

[1]Konventionen der gezeigten Boxplots: Innerhalb eines Kastens befindet sich die zentrale Hälfte aller Versuchspersonen. Der Median, dargestellt durch eine horizontale Linie innerhalb des Kastens, teilt die gesamte Verteilung, in zwei Hälften gleicher Personenzahl und somit den Kasten in zwei Quartile. Die vertikalen Linien außerhalb des Kastens (whiskers) kennzeichnet die jeweils außen liegenden Quartile der Verteilung. Punktwerte, die sehr weit vom Kasten entfernt liegen, werden als Ausreißer durch einen Punkt gekennzeichnet. Die kritische Entfernung ist die 1,5-fache Höhe des Kastens. Punktwerte, die eine Entfernung von dreifacher Kastenhöhe überschreiten, werden durch Kreuze gekennzeichnet. (Nicht in der Abbildung vorhanden.)

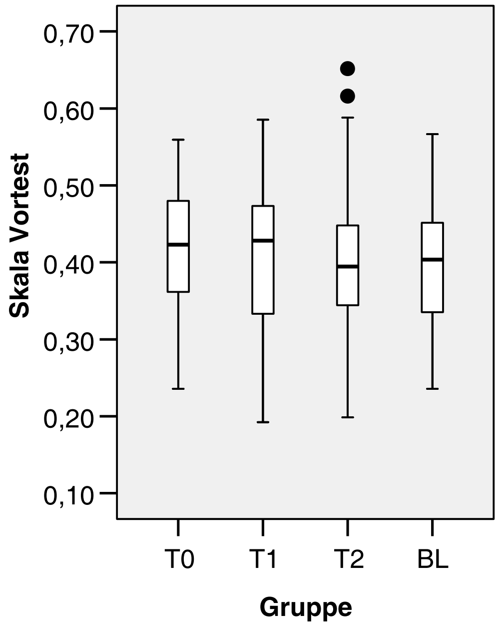


Abb. 10.1: Punktwerteverteilungen der Vortestergebnisse aller Gruppen

Jahrgangsstufe ausgelegt waren, nicht zentral, aber dennoch vollständig in einem zuverlässigen Bereich von 0,1 bis 0,5 (siehe Kapitel 8). Die Verteilungen der Gruppen sind augenscheinlich gleich.[2] In der selbstkonstruierten Skala zur Erfassung des Vorwissens zu Pfeilen und zur Mechanik erscheinen die Verteilungen ebenfalls sehr ähnlich. Der Wertebereich der Skala ist weitestgehend ausgeschöpft. Die Mediane der Gruppen liegen zentral.

10.1.2 Varianzanalyse

Die Varianzanalyse erlaubt eine Aussage über die Gleichheit der vier Gruppen auf Grundlage der Streuung der Punktwerte der Versuchspersonen. Die Analyse zeigt, dass die vier Gruppen bezüglich des Vortestergebnisses gleich sind ($p = .51$, Details siehe Anhang D.1.3). Auch bezüglich der beiden Subskalen unterscheiden sich die Gruppen nicht signifikant ($p = .26$ bzw. $p = .82$)[3]. Die Gruppen der Studie unterscheiden sich folglich vor den Lerneinheiten

[2] In der Darstellung für T2 und BL erscheinen mehr Ausreißer, da die mittleren Quartile der Gruppen T2 und BL schmaler als die der anderen Gruppen sind. Die Punktwerte treten aber im Wesentlichen nicht über die Grenzen der anderen Gruppen hinaus.

[3] Die Wahrscheinlichkeiten im Kontext der Signifikanzprüfungen werden zur besseren Lesbarkeit der englischen Konvention entsprechend ohne führende Null und mit einem Punkt notiert. Das Signifikanzniveau ist wie in der didaktischen Forschung üblich auf .05

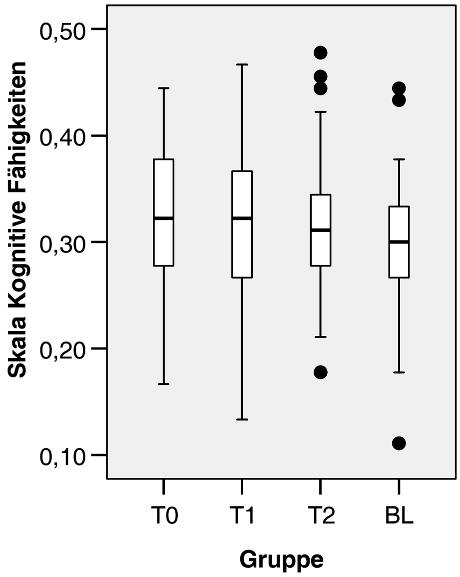


Abb. 10.2: Punktwerteverteilungen innerhalb der Skala „Kognitive Fähigkeiten“ des Vortest

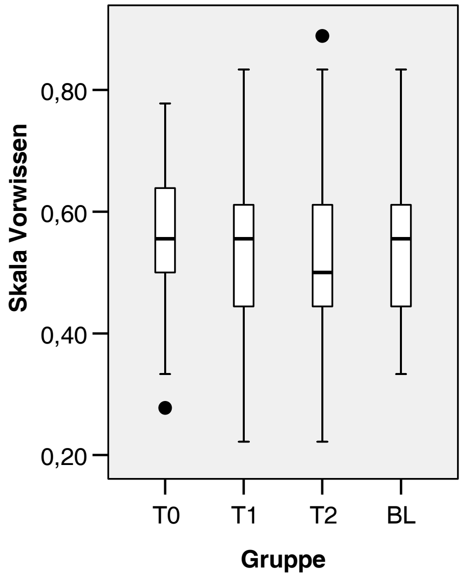


Abb. 10.3: Punktwerteverteilungen innerhalb der Skala „Physik und Pfeile“ des Vortests

nicht in ihren Leistungen, soweit sie durch den Vortest erhoben werden. Ein Verfahren zur Parallelisierung der Gruppen muss nicht angewandt werden.

Die Voraussetzungen für die Varianzanalyse des Vortestergebnisses sind stets erfüllt. Die Homogenität der Varianzen (Levene-Test, $p > .3$)[4] und die Normalverteilung (Kolmogorov-Smirnov-Test, $p > .8$) sind gegeben. Die detaillierten Kennwerte und Diagramme sind im Anhang D.1.1 und D.1.2 zu finden. Für die Subskalen bestehen die Homogenität der Varianzen ($p > .3$) und die Normalverteilung ($p > .2$) bis auf eine Ausnahme. Die Normalverteilung der Werte der Gruppe T1 ist bezüglich der Skala „Physik und Pfeile“ nicht ausreichend gesichert ($p = .05$). Dieses Ergebnis ist jedoch unkritisch, da sich die Varianzanalyse gegenüber einer schwachen Verletzung der Voraussetzung der Normalverteilung robust verhält. Eine entsprechende Diskussion der Robustheit der Varianzanalyse findet sich bei Field (2005, S. 324 & 347) und Bortz (1999, S. 276).

festgesetzt. Punktwerte werden in deutscher Schreibweise aufgeführt.

[4]Im Text werden zur besseren Lesbarkeit für die Wahrscheinlichkeiten im Fall mehrerer Skalen lediglich Grenzen benannt. Im Anhang sind alle Werte einzeln gelistet.

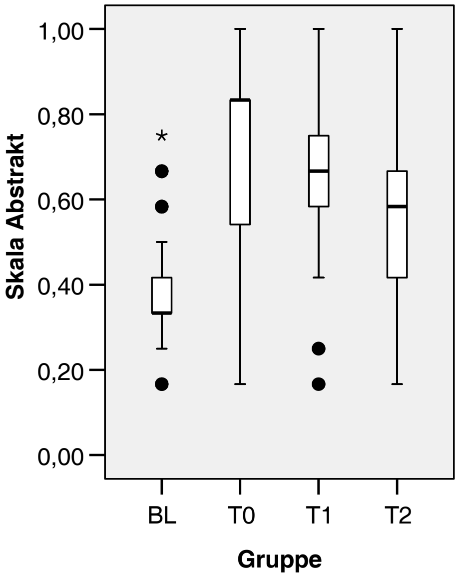


Abb. 10.4: Punktwerteverteilungen der Gruppen für die Skala Abstrakt

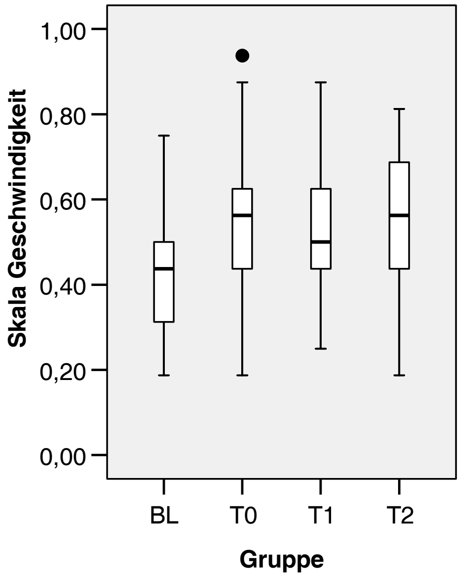


Abb. 10.5: Punktwerteverteilungen der Gruppen für die Skala Geschwindigkeit

10.2 Ergebnisse des Nachtests

Die Leistungen der vier Gruppen T0, T1, T2 und BL werden mit den vier Skalen Abstrakt, Geschwindigkeit, Kraft und Weitere erhoben und verglichen, um die Hypothese zu verifizieren. Vor der Auswertung der geplanten Kontraste werden die Punktwerteverteilungen der Gruppen deskriptiv vorgestellt und mit einer Varianzanalyse die Ungleichheit der Gruppen belegt. Im Detail sind die Kennwerte und Balkendiagramme mit angepasster Normalverteilung im Anhang D.1.4 und D.1.5 zu finden.

10.2.1 Punktwerteverteilungen

In den Abb. 10.4 bis 10.7 sind die Punktwerteverteilungen der Gruppen für alle Skalen gezeigt. Es ist deutlich, dass die Streuungen insgesamt groß ausfallen und weite Bereiche der Skalen abgedecken werden. Diese deutliche Differenzierung der Versuchspersonen innerhalb der Grenzen der Skalen spricht für die Funktionalität der Skalen. Jedoch ist ebenso auffällig, dass sich die Gruppen wenig unterscheiden, ohne an dieser Stelle eine Aussage über die Signifikanzen treffen zu wollen. Die Minima und Maxima unterscheiden sich wie auch zum größten Teil die mittleren Quartile augenscheinlich kaum. Ins-

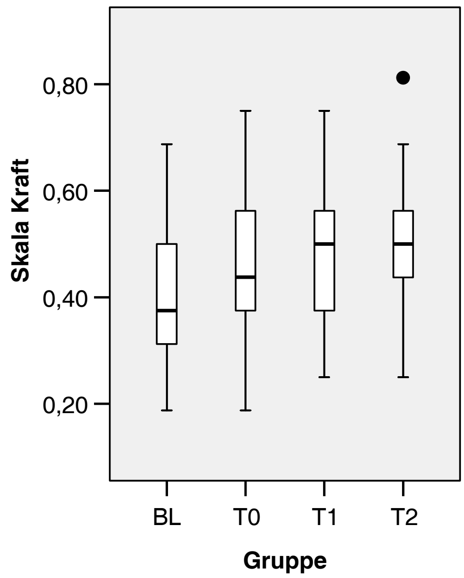


Abb. 10.6: Punktwerteverteilungen der Gruppen für die Skala Kraft

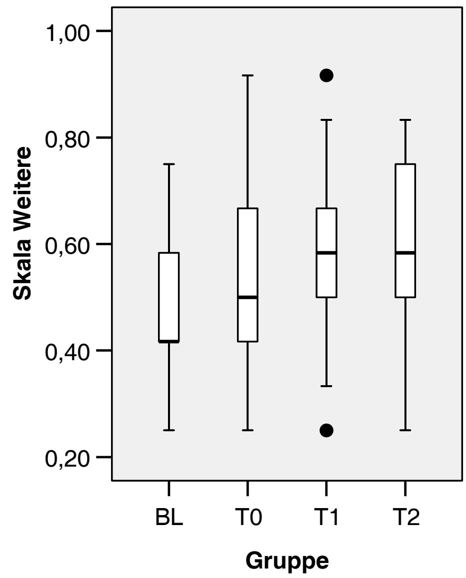


Abb. 10.7: Punktwerteverteilungen der Gruppen für die Skala Weitere

besondere zwischen den Treatmentgruppen fallen die Differenzen schwach aus. Die Mediane liegen dicht beieinander, gleichzeitig sind die Überlappungen der beiden zentralen Quartile deutlich. Es entspricht den Erwartungen, dass der Median der Baselinegruppe in allen Fällen unterhalb der Mediane der drei Treatmentgruppen liegt. Allerdings reichen die unteren drei Quartile der Baselinegruppe teilweise bis an den Median der Treatmentgruppen heran.

Betrachtet man die Punktwerteverteilung innerhalb der abstrakten Skala, so ist eine deutliche Trennung der Baselinegruppe und der Treatmentgruppen zu erkennen, siehe wieder Abb. 10.4. Auch scheint die Gruppe T0 vom speziellen abstrakten Unterricht zu profitieren, denn ihr Median liegt deutlich oberhalb der 3/4-Grenze von T1 und T2. Bedenklich ist, dass die Gruppe T0 an die obere Grenze der Skala stößt, indem vier Versuchspersonen die maximale Punktzahl erreichen. Der Median von T0 liegt oberhalb von 0,8 und die Verteilung ist nach oben gestaucht. Auch in den anderen beiden Treatmentgruppen erreicht jeweils eine Versuchsperson die maximale Punktzahl, siehe auch Abb. 10.8. Im mittleren Leistungsbereich erscheinen die Punktwerte jedoch angemessen verteilt, nur im oberen Leistungsbereich kann die Skala Abstrakt augenscheinlich die Leistungen nicht in aller Deutlichkeit abbilden.

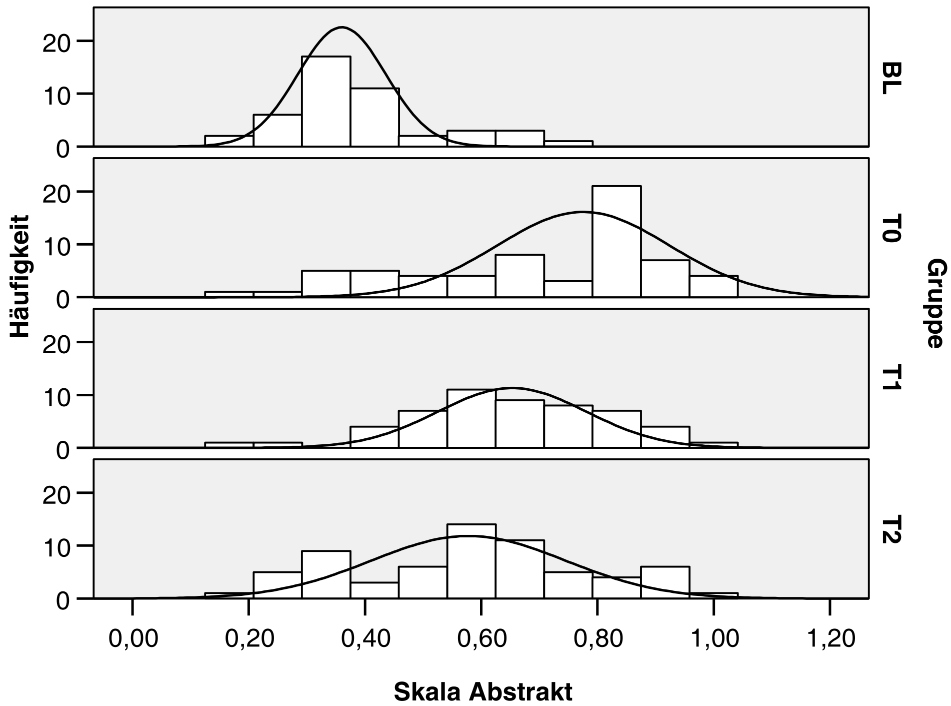


Abb. 10.8: Eine andere Darstellung der Punktwerteverteilung innerhalb der Skala Abstrakt: Eine leichter Deckeneffekt ist für die Gruppe T0 sichtbar. (Das Histogramm ist aus Darstellungsgründen bis 1,20 gezeichnet. Die Skala ist auf 1 normiert.)

Die Skala Geschwindigkeit zeigt bezüglich der Grenzen ein zufriedenstellendes Bild, siehe wieder Abb. 10.5. Minima und Maxima der Gruppen liegen innerhalb der Grenzen der Skala. Die Mediane liegen zentral zwischen 0,4 und 0,6. Allerdings liegen die Gruppen wieder dicht zusammen. Die beiden mittleren Quartile der Treatmentgruppen überlappen nahezu vollständig. Ein Vorsprung der Gruppen T1 und T2 gegenüber T0, wie es der Inhalt der Treatments nahe legen würde, ist nicht sichtbar. Nur die Baselinegruppe fällt in ihren Leistungen sichtbar zurück.

Im Fall der Skala Kraft liegen die Punktwerteverteilungen der Gruppen ebenfalls dicht. Die mittleren Quartile der Gruppen unterscheiden sich kaum. Auch die Baselinegruppe erreicht trotz fehlenden Unterrichts vergleichsweise hohe Punktwerte. Ein Effekt des speziellen Unterrichts der Gruppe T2 ist nur dahingehend zu erkennen, dass das zweite Quartil der Gruppe T2 schmaler ist. Das bedeutet, dass Versuchsperson im unteren Leistungsbereich der Gruppe T2 im Vergleich zu den anderen Gruppen höhere Punktwerte erreichen. Dies deutet daraufhin, dass die Treatments eventuell auf Versuchspersonen verschiedener Leistungsbereiche unterschiedlich wirken (siehe auch Exploration im Kapitel 11, S. 103). Außerdem fällt auf, dass die Kraftskala nicht vollständig abgedeckt wird. Weniger als ein Viertel der Versuchspersonen erreicht Punktwerte oberhalb von 0,6. Die Skala Kraft fällt den Versuchsperson offenbar verhältnismäßig schwer.

Die Punktwerteverteilung der Skala Weitere entspricht in verschiedener Hinsicht den Vorstellungen. Trotz großer Überlappungen zeichnet sich eine Reihenfolge der Gruppen entsprechend der Anzahl der behandelten Pfeilanwendungen ab. Die zentrale Hälfte der Gruppe T2 erstreckt sich am weitesten in die oberen Leistungsbereiche. Die Unsymmetrie legt den Verdacht nahe, dass diesmal die Versuchspersonen des oberen Leistungsbereichs besonders profitieren. Die Gruppe T1 liegt kompakt und nahezu symmetrisch um den Punktwert 0,6. Die Gruppe T0 unterscheidet sich von dieser in der Hinsicht, dass mehr Versuchspersonen im unteren Skalenbereich unter 0,5 liegen als bei den anderen Treatmentgruppen. Der Median der Baselinegruppe liegt im Vergleich zu den anderen deutlich niedriger, jedoch erreichen die Leistungsstärksten dieser Gruppe teilweise höhere Punktwerte als Dreiviertel der Probanden der Treatmentgruppen.

10.2.2 Varianzanalyse

Die Voraussetzungen für die klassische Varianzanalyse und die geplanten Kontraste werden nicht von allen Gruppen erfüllt (Details zu allen Tests siehe Anhang D.1.5). Die Verwendung korrigierter Verfahren beziehungsweise die angemessene Interpretation der Ergebnisse ist notwendig. Nahezu alle

Punktwerteverteilungen sind normalverteilt ($p > .05$) und erfüllen somit die erste Voraussetzung. Die Ausnahmen bilden die Gruppen T0 und BL bezüglich der Skala Abstrakt, da die Verteilungen der Gruppen zu schmalgipflig ausfallen, siehe wieder Abb. 10.8 (Kolmogorov-Smirnov-Test, $p \leq .02$). Die Skala Abstrakt kann die Leistungsverteilungen dieser beiden Gruppen nicht in Form einer Normalverteilung darstellen. Die Ursache liegt vermutlich darin, dass die Gruppe T0 genau auf diese Art von Aufgaben spezialisiert ist, während die Gruppe BL noch nie mit Pfeilen in dieser Weise gearbeitet hat. Auch wenn damit die Voraussetzungen für eine Varianzanalyse verletzt sind, muss auf dieses Verfahren nicht verzichtet werden. Die Konsequenz einer schmalgipfligen Verteilung ist nach Bortz (1999, S. 276) ein konservatives Verhalten der Analyse, also eine Entscheidung zugunsten der Nullhypothese und gegen einen Effekt der Treatments. Die Ergebnisse der Gruppen T0 und BL bezüglich der Skala Abstrakt sind entsprechend zu interpretieren. Ein ähnliches Bild zeigt die Prüfung der Homogenität der Varianzen. Der Levene-Test belegt für die Verteilungen der Skalen Geschwindigkeit, Kraft und Weitere die Homogenität ($p > .4$, Details siehe Anhang D.1.6). Im Fall der Skala Abstrakt wird zusätzlich zur klassischen Varianzanalyse der Welch- und der Brown-Forsythe-Test benutzt, da diese die Varianzinhomogenität der Verteilungen berücksichtigen. Die durch Varianzinhomogenität entstehenden Schwierigkeiten werden in Field (2005, S. 347) und Bortz (1999, S. 276) besprochen.

Die Varianzanalyse belegt bezüglich der Skalen Geschwindigkeit, Kraft und Weitere, dass sich alle Gruppe signifikant unterscheiden ($p < .04$). Für die Skala Abstrakt geben die Varianzanalyse sowie die korrigierten Verfahren an, dass sich die Gruppen ebenfalls signifikant unterscheiden ($p < .01$).

10.2.3 Validierung der Hypothesen

Zu Hypothese 1 - Allgemeiner Leistungszuwachs

Mit dem ersten Kontrast werden innerhalb aller Skalen die Treatmentgruppen der Baselinegruppe gegenübergestellt, um einen Leistungszuwachs durch die Lerneinheiten entsprechend der Hypothese H_1: $\mu_{T0 \cup T1 \cup T2} > \mu_{BL}$ für alle Skalen nachzuweisen. Die Abb. 10.9 zeigt die Mittelwerte und die Standardabweichungen der Verteilungen.[5]

Die Unterschiede zwischen den Treatmentgruppen und der Baselinegrup-

[5] Zu jedem Mittelwert ist insgesamt die doppelte Standardabweichung 2 σ eingezeichnet. In diesem Bereich befinden sich 68 % der Versuchspersonen im Fall einer idealen Normalverteilung der Personen.

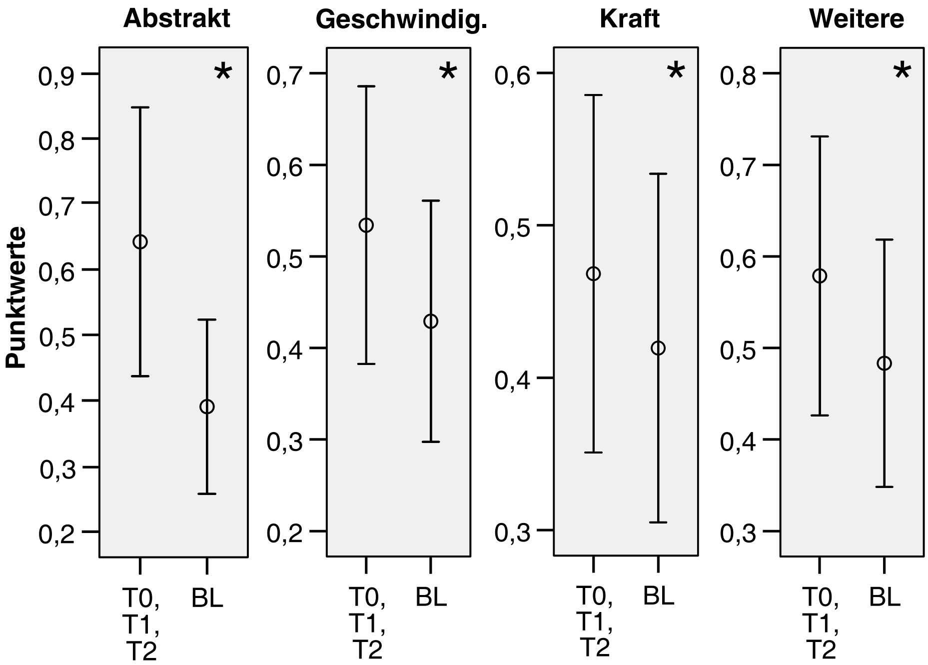


Abb. 10.9: Erster Kontrast für die vier Skalen des Nachtests: Die gebündelten Treatmentgruppen werden der Baselinegruppe gegenübergestellt. Alle Differenzen sind signifikant (*).

pe sind in allen vier Fällen signifikant ($p_{\text{1-seitig}} <= .01$).[6] Die Effektstärke der Differenz der abstrakten Leistungen ist groß ($r = .7$, korrigiert, $r = .5$ klassisch).[7] Für die Skalen Geschwindigkeit und Weitere liegen die Effekte im mittleren ($r = .3$), für die Kraft ($r = .2$) im mittleren bis schwachen Bereich. Details zu allen Kontrasten sind in Anhang D.1.6 ab S. 197 zu finden. Die Hypothese 1 ist damit validiert. Die Fertigkeiten der Probanden der Treatmentgruppen sind durch die Lerneinheiten bestimmt.

Zu Hypothese 2 - Mathematisch-abstrakte Leistung

Entsprechend der Hypothese 2a wird erwartet, dass die Gruppe T0, die den Umgang mit anwendungsfreien Pfeilen intensiv geübt hat, bessere Leistungen erzielt als die Gruppen T1 und T2: H_{2a}: $\mu_{T0} > \mu_{T1\cup T2}$ für die Skala Abstrakt.

Der zweite Kontrast bezüglich der Skala Abstrakt zeigt, dass die Gruppe T0 signifikant bessere Leistungen erreicht als die gebündelten Gruppen T1 und T2, siehe Abb. 10.10. Die Hypothese 2a ist damit validiert. Die Effektstärke liegt im mittleren bis schwachen Bereich ($p_{\text{1-seitig}} \leq .01$, klassisch und korrigiert, $r = .2$).

Da sich die Lerneinheiten von T1 und T2 im Anteil an abstrakt-mathematischen Inhalten nicht unterscheiden, wird deren Gleichheit erwartet: H_{2b}: $\mu_{T1} = \mu_{T2}$ für die Skala Abstrakt. Der entsprechende dritte Kontrast ist in der Abb. 10.11 gezeigt. Wider Erwarten unterscheiden sich die Gruppen signifikant (korrigiert: $p_{\text{2-seitig}} < .05$, $r = .2$, klassisch: $p_{\text{2-seitig}} < .05$, $r = .1$). Die Hypothese 2b ist damit nicht valide. Der Leistungsunterschied lässt sich nicht auf die Lerneinheiten zurückführen, sondern muss aus klassenabhängigen Variablen resultieren.

Zu Hypothese 3 - Nahtransfer

Es wurde erwartet, dass Versuchspersonen zu Aufgaben, in denen ihnen die Pfeilanwendung bekannt ist, bessere Leistungen zeigen als Personen, denen die Anwendung nicht im Unterricht begegnet ist. Der Transfer von Wissen innerhalb einer Pfeilanwendung sollte also leichter fallen als ein Transfer in einen unbekannten Anwendungsbereich: H_{3a}: $\mu_{T1\cup T2} > \mu_{T0}$ für die Skala Geschwindigkeit und $\mu_{T2} > \mu_{T0\cup T1}$ für die Skala Kraft. Die entsprechenden Vergleiche sind ebenfalls in Abb. 10.10 zu sehen. Dabei zeigt der zweite Kontrast innerhalb der Skala Geschwindigkeit entgegen der Vermutung

[6] Bei der Berechnung der Signifikanzen ist berücksichtig worden, dass es sich um eine gerichtete oder auch einseitige Hypothese handelt, vergleiche Anhang A.1, S. 136

[7] Effektstärken: klein: $r = .1$, mittel $r = .3$, stark $r = .5$, Field (2005, S. 32, 285 & 398), siehe auch Anhang A.1

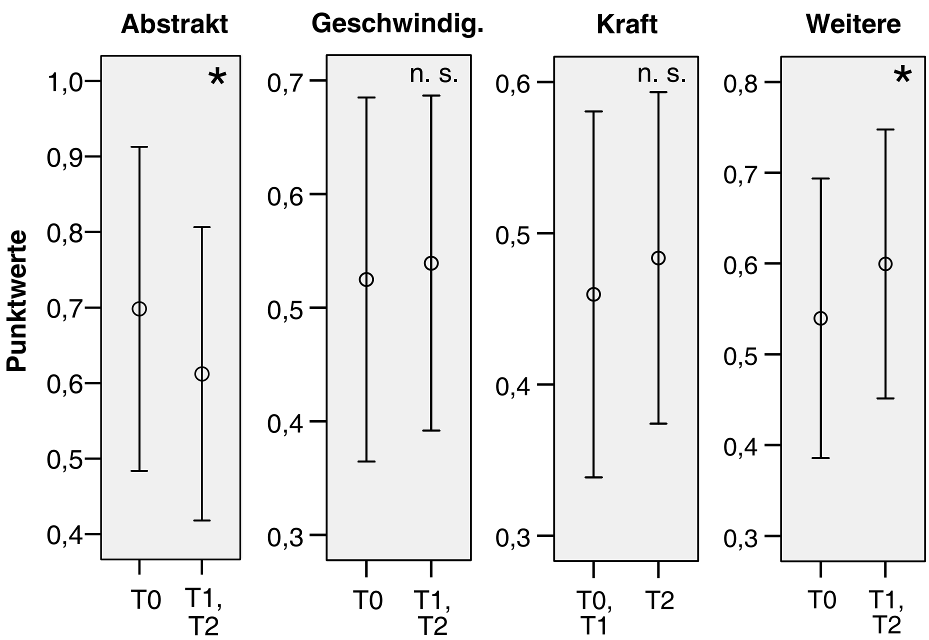


Abb. 10.10: Der zweite Kontrast ist für die Skalen Abstrakt, Geschwindigkeit und Weitere identisch. Es wird der Mittelwert der Gruppe T0 dem gemeinsamen Mittelwert der Gruppen T1 und T2 gegenübergestellt. Für die Skala Kraft wird der Mittelwert der Gruppe T2 mit dem gemeinsamen Mittelwerte der Gruppen T0 und T1 verglichen. Nur für die Skalen Abstrakt und Weitere sind die Werte signifikant verschieden. (n. s.: nicht signifikant)

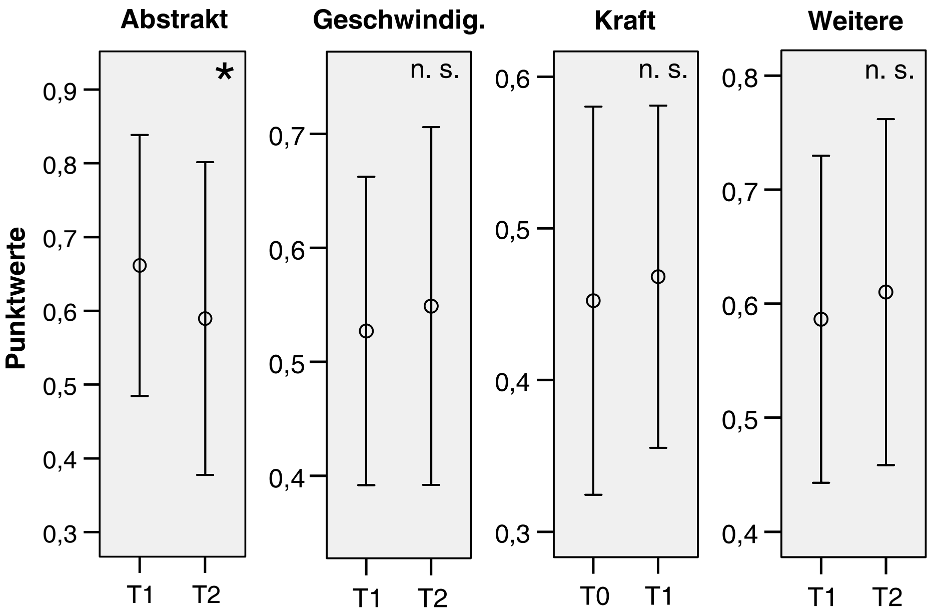


Abb. 10.11: Mit dem dritten Kontrast werden die Gruppen T1 und T2, beziehungsweise im Fall der Skala Kraft die Gruppen T0 und T1 gegenübergestellt. Die Mittelwerte sind nur für die Skala Abstrakt signifikant.

keinen signifikanten Unterschied an ($p_{\text{1-seitig}} = .28$). Genauso ist ein Leistungsvorsprung der Gruppe T2 bezüglich Kraftaufgaben nicht nachweisbar ($p_{\text{1-seitig}} = .10$). Die Hypothese 3a lässt sich folglich nicht empirisch belegen. Aus der expliziten Behandlung von Anwendungen im Unterricht scheinen die Gruppen keine Vorteile ziehen zu können, die durch die Skalen abgebildet werden.

Als Hypothese 3b ist formuliert worden, dass sich die Gruppen T1 und T2 in ihrer Leistung zu Geschwindigkeitspfeilen nicht unterscheiden, da diese von beiden Gruppen behandelt worden sind: H_{3b}: $\mu_{T1} = \mu_{T2}$ für die Skala Geschwindigkeit. Der Vergleich ist in Abb. 10.11 zu sehen. Es zeigt sich kein signifikanter Unterschied ($p_{\text{2-seitig}} = .43$). Die Hypothese 3b ist valide.

Zu Hypothese 4 - Ferntransfer

Im Zentrum der Studie stehen die Gruppenvergleiche im Zusammenhang mit nicht unterrichteten Pfeilanwendungen. Es wird erwartet, dass sich ein Anwendungen umfassender Unterricht positiv auf die Leistungen auswirkt: H_{4a}: $\mu_{T1 \cup T2} > \mu_{T0}$ für die Skala Weitere und $\mu_{T1} > \mu_{T0}$ für die Skala Kraft.

In Abb. 10.10 ist der zweite Kontrast für die Skala Weitere[8]dargestellt. Die Gruppen T1 und T2 sind entsprechend der Hypothese der Gruppe T0 signifikant überlegen ($p_{\text{1-seitig}} < .01$, $r = .2$). Die Effektstärke liegt dabei im schwachen bis mittleren Bereich. Der Vergleich der Gruppe T0 und T1 bezüglich der Skala Kraft ist in Abb. 10.11 zu sehen. Es zeigt sich entgegen der Vermutung jedoch kein signifikanter Unterschied ($p_{\text{1-seitig}} = .23$). Das bedeutet, dass sich die Hypothese 4a für die Anwendung Kraft nicht validieren lässt. Die Gültigkeit der Hypothese ist somit von der Pfeilanwendung abhängig und eine allgemeine Validierung entsprechend nicht möglich.

Es besteht die Vermutung, dass eine erhöhte Anzahl von Pfeilanwendungen im Unterricht positiv auf die Leistung im Umgang mit anderen Anwendungen wirkt: H_{4b}: $\mu_{T2} > \mu_{T1}$ für die Skala Weitere. In der Abb. 10.11 sind die Gruppen T1 und T2 bezüglich der Skala Weitere gegenübergestellt. Entgegen der Erwartung unterscheiden sich diese nicht signifikant ($p_{\text{1-seitig}} = .19$). Die Hypothese 4b lässt sich im Rahmen der Studie nicht empirisch belegen.

[8]Die Skala Weitere setzt sich im Wesentlichen aus Aufgaben zum Ort (4 Items) und zur Verschiebung (5 Items) zusammen. Je ein weiteres Item bezieht sich auf die Beschleunigung und den Stoß oder lässt keine sinnvolle Pfeildarstellung zu.

10.3 Diskussion

10.3.1 Resümee

Der Untersuchung lag die Forschungsfrage zugrunde, Pfeile als mentale Werkzeuge empirisch nachzuweisen. Dazu wurden verschiedene Lerneinheiten einander gegenübergestellt, die die Vektorpfeile mit voneinander abweichender Anzahl von Anwendungen einführen. Eine an Anwendungen reiche Lerneinheit sollte den Versuchspersonen die Flexibilität der Vektorpfeile verdeutlichen und ihnen so die Verwendung der Pfeile im Sinne eines mentalen Werkzeugs ermöglichen. Für die Lerneinheiten sind die Geschwindigkeit und die Kraft als Anwendungen ausgewählt worden. Weitere Größen, insbesondere Ort und Verschiebung, werden als unbekannte Pfeilanwendung für den abschließenden Test herangezogen.

Bei Betrachtung der Ergebnisse ist es in erster Linie irritierend, dass einfache Erwartungen an die Leistungsausprägungen der Gruppen nicht erfüllt werden. Eine Differenzierung der Gruppen bezüglich der Anforderungen Nah- und Ferntransfer ist nicht möglich, denn es sind keine Leistungsunterschiede zwischen den Gruppen sichtbar, die die Anwendung behandelt beziehungsweise nicht behandelt haben. (H_{3a} nicht valide, d. h. $\mu_{T1\cup T2} \not> \mu_{T0}$ für die Skala Geschwindigkeit, $\mu_{T2} \not> \mu_{T0\cup T1}$ für die Skala Kraft). Nur im Zusammenhang mit anwendungsfreien Aufgaben ist ein Leistungsvorsprung der auf abstrakte Aufgaben spezialisierten Gruppe gegenüber den anderen Treatmentgruppen deutlich (H_{2a} valide, $\mu_{T0} > \mu_{T1\cup T2}$ für die Skala Abstrakt). In ähnlicher Weise ist die Leistungsdifferenz zwischen den unterrichteten Gruppen und der ununterrichteten Gruppe zwar signifikant, aber nur im Fall von abstrakten Aufgaben stark ausprägt (H_1 valide, $\mu_{T0\cup T1\cup T2} > \mu_{BL}$). An anderer Stelle existieren Leistungsunterschiede, die sich nicht deuten lassen. (H_{2b} nicht valide: $\mu_{T1} \neq \mu_{T2}$ für die Skala Abstrakt).

Es ist der Kern der Studie, die Flexibilisierung des Wissens über die Nutzungsoptionen der Pfeile durch einen anwendungsreichen Unterricht nachzuweisen. Es konnte in einem speziellen Fall gezeigt werden, dass das Wissen um eine Pfeilanwendung auch im Zusammenhang mit einer anderen Anwendung förderlich ist. Versuchspersonen, die eine beziehungsweise zwei Anwendungen von Pfeilen kennen, erbringen bezüglich der unbekannten Anwendungen Ort und Verschiebung signifikant bessere Ergebnisse als Personen, die keine Anwendungen von Pfeilen kennen (H_{4a} valide: $\mu_{T1\cup T2} > \mu_{T0}$ für Skala Weitere)

Insgesamt zeigen die Daten jedoch ein uneindeutiges Bild. Anhand der Pfeilanwendung Kraft, die zwei Gruppen ebenfalls nicht im Unterricht begegnet ist, lässt sich dieser Effekt nicht sichtbar machen (H_{4a} nicht valide,

$\mu_{T1} \not> \mu_{T0}$ für Skala Kraft). Die Leistungsunterschiede sind demzufolge von der Art der verwendeten Anwendung abhängig. Auch ließ sich ein positiver Effekt des Wissens um zwei Anwendungen im Vergleich zu nur einer Anwendung nicht zeigen (H_{4b} nicht valide: $\mu_{T2} \not> \mu_{T1}$ für Skala Weitere). Ein empirischer Beleg für die Flexibilisierung und Generalisierung der Pfeile im Sinne eines mentalen Werkzeugs durch Vermittlung verschiedener Pfeilanwendungen lässt sich mit der durchgeführten Untersuchung folglich nur in einem speziellen Fall erbringen.

10.3.2 Diskussion und Kritik

Da sich neben einigen Kernhypothesen zum Ferntransfer insbesondere die einfachen Erwartungen zum Nahtransfer nicht in den Leistungsausprägungen der Gruppen wiederfinden lassen, sind mögliche Störungen der Studie zu diskutieren und zu bewerten. Die Treatments und die Tests sind dafür in Betracht zuziehen. Den größten Einfluss auf die Leistungsentwicklung der Versuchspersonen hat nach subjektivem Eindruck die Motivation der jeweiligen Klassen. Wie im Kapitel 9 beschrieben, existierten teilweise Probleme in einzelnen Klassen, deren Auswirkungen auf die Ergebnisse der Studie nicht abschätzbar sind. Es lässt sich nur vermuten, dass die Ergebnisse der Gruppe T1 durch die Klasse A der Schule A negativ beeinflusst worden sind. Gleiches gilt für die Leistung der Gruppe T2 durch die Klasse B der Schule C. Außerdem ist es möglich, dass die Leistungen der Gruppen T1 und T2 durch den vorangegangenen Schulunterricht zum hydrostatischen Auftrieb in den Klassen A und B der Schule A beeinflusst wurden (siehe Tabelle 9.2 auf S. 95). Das Entfernen einzelner Klassen aufgrund dieser subjektiven Eindrücke ist jedoch nicht zulässig, denn es ist nicht auszuschließen, dass auch die anderen Klassen unter ähnlichen Einflüssen stehen, diese jedoch im Unterrichtsgeschehen nicht sichtbar geworden sind. Der Einfluss der schulklassenabhängigen Faktoren ist mit der Entscheidung für eine Feldstudie in Kauf genommen worden und durch die Anzahl von drei Schulklassen pro Treatmentgruppe in einem gewissen Rahmen begrenzt worden.

Neben den Unregelmäßigkeiten im Unterricht kann eine prinzipielle Fehleinschätzung der Treatments nicht ausgeschlossen werden. Die entworfenen Treatments können grundsätzlich nicht geeignet sein, Pfeile als mentale Werkzeuge erkennbar zu machen, obwohl diese grundsätzlich als Werkzeuge funktionieren, wie es auch in einem speziellen Fall der Studie zu sehen war. Die starke Streuung bis zu hohen Punktwerten in allen Versuchsgruppen spricht dafür, dass das Pfeilkonzept für bestimmte Personen vergleichsweise leicht zu erlernen ist. Insgesamt lässt sich entsprechend vermuten, dass ein großer Teil der Probanden innerhalb der vier Unterrichtsstunden die Darstellungs- und Handhabungsoptionen der Pfeile erfasst, also auch ein verhältnismäßig ungeeigneter Unterricht zu einem flexiblen Verständnis der Pfeile führt. Als Folge dessen wären im Nachtest keine Leistungsunterschiede sichtbar, obwohl Pfeile als mentale Werkzeuge funktionieren. Im explorativen Teil der Arbeit (Kapitel 11) werden zur Untersuchung dieser Überlegung die Gruppen in leistungsschwache und leistungsstarke Untergruppen getrennt. Im Fall der leistungsschwachen Probanden sollten entsprechende Leistungsunterschiede sichtbar sein, während bei den Leistungsstarken keine Unterschiede zum Vorschein treten sollten.

Eine weitere mögliche Ursache für die geringen Leistungsdifferenzen der Gruppen kann im Vorwissen der Probanden begründet sein. Die relativ hohen Punktwerte der nicht unterrichteten Baselinegruppen im Nachtest sprechen dafür, dass Wissen zu Pfeilen außerhalb der Treatments erworben wurde. Das bedeutet nicht nur, dass die Leistungssteigerungen der unterrichteten Gruppen durch die Treatments somit geringer ausfallen, sondern auch, dass die Differenzen zwischen den Gruppen verwaschen werden. Denn wenn eine Anwendung von Pfeilen, zum Beispiel die Verschiebung, einigen Probanden schon außerhalb der Treatments begegnet ist, sind diese Personen für ihre jeweilige Gruppe, die sich gerade durch die Anzahl der umfassenden Anwendungen auszeichnet, nicht mehr charakteristisch. Somit hat das Vorwissen auch dann einen negativen Einfluss auf die Untersuchung, wenn sich die Gruppen im Umfang des Vorwissens nicht unterscheiden, der Vortest also keine Gruppenunterschiede anzeigt.

Es soll abschließend nicht ausgeschlossen werden, dass die Treatments auch ohne Einfluss von Vorwissen und gruppenabhängigen Störungen eventuell nicht geeignet sind, Pfeile als mentale Werkzeuge sichtbar zu machen. Obwohl sich die Treatments formal in der Anzahl der Anwendungen unterscheiden, ist es nicht auszuschließen, dass dies keine vergleichsweise gestufte Entwicklung von Fertigkeiten zur Folge hat. Die Treatments sind eventuell nicht in dem Maße andersartig, um auch verschiedenartige Stufen von Verständnis von Pfeilen zu erzeugen beziehungsweise nachweisbar zu machen. Eine grundlegend andere Unterrichtsgestaltung ist jedoch schwierig. Die Anzahl der vektoriellen Größen innerhalb der Mechanik ist im Wesentlichen ausgeschöpft worden. Andere Themenbereiche aufzunehmen ist schwierig und wahrscheinlich kaum von Vorteil. Ein Vorschlag, Pfeile auf grundsätzlich andere Art und Weise als mentale Werkzeuge nachzuweisen, ist nicht bekannt.

Neben einer potenziellen Schwäche der Treatments ist es alternativ oder zusätzlich möglich, dass die Tests nicht in der Weise funktionieren, wie es für die Untersuchung notwendig wäre. Im Folgenden werden mögliche Störungen des Vor- und Nachtests diskutiert. Die im Vortest verwendeten Items des KFT sind vielfach erprobt und getestet. Jedoch sind nur zwei mathematischorientierte Skalen des Tests eingesetzt und weitere insbesondere sprachliche Teile wegen geringerer Relevanz und Zeitmangels nicht benutzt worden. Die Gruppen können sich entsprechend unbemerkt in ihrer Leseleistung unterscheiden, was potenziell im Fall eines starken Ungleichgewichts zu einer Verschiebung der Nachtestergebnisse beitragen kann. Kritischer ist jedoch die Skala „Pfeilen und Physik“ des Vortests zu sehen. Die selbst konstruierte Skala ist nicht einwandfrei, da die Kennwerte der Itemanalyse nicht für alle Items in einem wünschenswerten Bereich liegen beziehungsweise nicht vorhanden sind (siehe Kapitel 8.1). Auch ist zu überdenken, ob durch die geringe Anzahl an Items das Wissen um Physik und Pfeile valide abgefragt wird. Dementsprechend wäre es möglich, dass sich die Gruppen in diesen Bereichen bereits vor den Treatments signifikant unterscheiden und auf diese Weise zu einer Verfälschung der Ergebnisse führen.

Auch der Nachtest ist bezüglich seiner Reliabilität kritisch zu bewerten, da seine Entwicklung nicht frei von Schwierigkeiten war. Die Testgütekriterien sind teilweise nur schwach erfüllt und überarbeitete Items sind nach der Pilotstudie ohne weitere Prüfung hinzugefügt worden (siehe Kapitel 8.2). Somit könnte es sein, dass der Nachtest existierende Leistungsunterschiede nicht in der Präzision darzustellen vermag, wie es für die Untersuchung notwendig wäre. Bezüglich der Validität ist zu hinterfragen, ob für den Erfolg im Nachtest nicht auch weitere, nicht auf Pfeile bezogene Fertigkeiten notwendig sind, um im Test erfolgreich zu sein. Es ist naheliegend, dass physikalisches Wissen zu den Themen Geschwindigkeit und Kraft zum Erfolg beiträgt. Dabei ist es möglich, dass dieses Wissen entweder in unterschiedlichem Ausmaß in den Treatments erworben wurde oder bereits vor der Studie für eine Unausgeglichenheit der Gruppen sorgte. Auch die Einflüsse der Lesefertigkeit insbesondere von fachlichem Textverständnis sind wahrscheinlich. Wieder ist es möglich, dass das fachliche Textverständnis in den Treatments in unterschiedlicher Weise geschult wurde oder dass bereits vor der Studie eine Inhomogenität der Gruppen bestand.

Mit Blick auf die einzelnen Skalen des Nachtests lassen sich konkretere Vermutungen entwickeln. Die Skala Weitere zeigt erwartungskonform einen Unterschied zwischen den zwei Anwendergruppen gegenüber der anwendungsfrei unterrichteten Gruppe an. Weitergehend ist jedoch kein Unterschied zwischen den beiden Gruppen mit Anwendungserfahrungen sichtbar. Eine Erklärung könnte ein geringes Auflösungsvermögen dieser Skala sein. Denn die beiden Gruppen T1 und T2 unterscheiden sich lediglich um eine Anwendung, während zuvor die Differenz der Anzahl der Anwendungen zwischen T0 und den gebündelten Gruppen T1 und T2 größer ausfällt und der Effekt entsprechend größer sein sollte. Die Skalen Geschwindigkeit und Kraft zeigen, abgesehen vom Vergleich mit der Baselinegruppe, generell keine Leistungsunterschiede an. Insbesondere ist kein Punktgewinn durch die Bekanntheit einer Pfeilanwendung sichtbar. Das bedeutet, dass die Skalen Leistungen messen, die zwar in den Treatments erworben wurden, sie aber weitergehend nicht die Einflüsse der konkreten Anwendungen trennen können. Somit wäre für den Erfolg in den Skalen Geschwindigkeit und Kraft ab einem gewissen Niveau zusätzliches Wissen notwendig, das in keinem Treatment vermittelt wird. Es lässt sich vermuten, dass dies Inhalte zum physikalischen Kraft- und Geschwindigkeitsbegriff sind. Da die für die Skala Weitere relevanten Ortsgrößen weniger von physikalischen Begriffsdefinitionen abhängen, lässt sich vermuten, dass in diesem Fall die Pfeilaspekte sichtbar werden.

Im Gegensatz zu den scheinbar wenig sensiblen Skalen Geschwindigkeit und Kraft erscheint die Skala Abstrakt sehr trennscharf zu sein, da alle Vergleiche signifikant und die Effektstärken teilweise stark ausfallen. Da die Schwerpunkte dieser Skala auf der Addition und der Subtraktion von Pfeilen liegen und die Aufgaben somit wenig alltäglich und ohne den Unterricht kaum zu beantworten sind, ist nachvollziehbar, dass die erreichten Punktwerte in hohem Maß von den Treatments abhängen. Besonders gilt dies für die Subtraktion, die nur im Unterricht der Gruppe T0 Thema gewesen ist und den Vorsprung dieser Gruppe plausibel macht. Die Differenz zwischen den Gruppen T1 und T2 lässt sich jedoch nicht sinnvoll deuten. Die fehlenden Normalverteilungen sind in der Hinsicht keine Erklärung, da bei schmalgipfligen Verteilungen ein eher konservatives Verhalten zu erwarten wäre. Die Ursache liegt vermutlich in einer unbemerkten Inhomogenität der Gruppen vor den Treatments verborgen.

Kapitel 11

Exploration

Im vorangegangenen Kapitel sind für die inkonsistenten Ergebnisse der Studie verschiedene mögliche Ursachen diskutiert worden. Die meisten der genannten Vermutungen lassen sich im Nachhinein nicht prüfen. Eine Validierung bedürfte weiterer Untersuchungen. Eine Ausnahme bildet der Einfluss der Lernfähigkeit der Versuchspersonen auf die Ergebnisse der Hypothesenprüfung. Prinzipiell sollte die Lernfähigkeit der Versuchspersonen keinen unmittelbaren Einfluss auf die Validierung der Hypothesen haben. Lernstarke Personen sollten genauso von mentalen Werkzeugen profitieren wie lernschwache. Es ist jedoch denkbar, dass der Transfer mithilfe der Pfeile im Rahmen der Untersuchung lediglich in einem bestimmten Leistungsbereich sichtbar wird. So wurde bereits beschrieben, dass eine Unterforderung leistungsstarker Versuchspersonen zu einer Reduzierung der Leistungsdifferenzen führen kann. Auch entstand bei Betrachtung der Punktwerteverteilung der Eindruck, dass die Treatments auf die Versuchspersonen des oberen und unteren Leistungsbereiches unterschiedlich zu wirken scheinen (siehe Kapitel 10.6).

Auf Grundlage der erhobenen Daten besteht die Möglichkeit, mit einer explorativen Analyse den Einfluss der Lernfähigkeit der Versuchspersonen auf den Ausgang der Hypothesenprüfung zu erkunden, da der Vortest ausgewählte Aspekte des Vorwissens und der Intelligenz erhebt. Es ist hinreichend bekannt, dass Vorwissen und Intelligenz die maßgeblichen Prädiktoren für den Lernzuwachs sind (siehe zum Beispiel Helmke und Schrader 1998; Wild et al. 2006; Weinert 1996; Stern 2003; Neubauer und Stern 2007). Die Ergebnisse des Vortests werden in diesem Sinne als ein Maß für die Lernfähigkeit der Versuchspersonen herangezogen und eine Begutachtung der Hypothesen in Abhängigkeit der Lernfähigkeit vorgenommen. Die vier Gruppen der Studie werden entlang des gemeinsamen Medians des Vortestergebnisses bei 0,41 geteilt. Damit ergeben sich insgesamt acht annährend gleich große Teilgruppen, siehe Tabelle 11.1. Eine Varianzanalyse bestätigt, dass sich die vier

	lernschwach	lernstark
Gruppe		
T0	28	35
T1	23	30
T2	36	29
BL	25	20
Summe	112	114

Tab. 11.1: Teilgruppengrößen, die sich aus dem Gruppen übergreifenden Median ergeben. (Da drei Versuchspersonen den Kennwert 0,41 besitzen, teilt der Median insgesamt in leicht ungleiche Gruppen.)

Teilgruppen der Lernstarken beziehungsweise die der Lernschwachen vor den Treatments nicht unterscheiden ($p > .2$, Details siehe Anhang D.2.1).

11.1 Punktwerteverteiltung

Um einen Eindruck von den Verteilungen zu bekommen, sind die Punktwerte in den Abb. 11.1 bis 11.4 dargestellt (Details siehe Anhang D.2.2). Unterschiede zwischen den Lernstarken und Lernschwachen werden sichtbar. Die Teilgruppen der lernschwachen Versuchspersonen befinden sich bezüglich der Skalen Geschwindigkeit und Kraft auf vergleichbar niedrigem Niveau wie die Baselinegruppen. Bezüglich der Skala Weitere löst sich die lernschwache Teilgruppe von T2 von der Baselinegruppe ab. Nur bezüglich der Skala Abstrakt ist eine Differenz zwischen Treatment- und Baselinegruppen für alle lernschwachen Teilgruppen sichtbar. Im Fall der lernstarken Versuchspersonen sind für alle Skalen Unterschiede zwischen Treatmentgruppen und Baselinegruppe erkennbar. Bemerkenswert ist, dass sich die schwache und starke Baseline-Teilgruppe augenscheinlich nie unterscheiden, während die lernstarken Treatment-Teilgruppen überwiegend oberhalb der lernschwachen liegen. Das heißt, dass Vorwissen und Intelligenz offensichtlich zum Lernzuwachs durch die Treatments beitragen, die Teilnahme an den Treatments jedoch den Erfolg im Nachtest bestimmt. Die Art der Treatments scheint für die Leistungsstarken von geringerer Bedeutung zu sein, denn die einzelnen starken Teilgruppen sind mit Ausnahme der abstrakten Skala sämtlich auf ähnlichem Niveau.

Ein Argument für die leistungsbezogene Teilung der Gruppen war die auffällige Lage und Form der Punktwerteverteiltungen der Gruppe T2 bezüglich der Skalen Kraft und Weitere (siehe Abb. 10.6 und Abb. 10.7 auf S. 103).

Entsprechend der Vermutung profitieren die lernschwachen Versuchspersonen besonders vom anwendungsreichen Unterricht, denn sie erreichen bezüglich der Skala Kraft fast das Niveau der Lernstarken. Anders als erwartet, zeigen sich die Verteilung der Teilgruppen bezüglich der Skala Weitere. Es sind nicht die Lernstarken, die übermäßig vom Treatment für T2 profitieren, vielmehr schließen wieder die Lernschwachen zu den Starken auf. Die unsymmetrische Verteilung ist dabei in beiden Teilgruppen von T2 zu finden. Das bedeutet insgesamt, dass das Treatments T2 für die lernschwache Teilgruppe im Fall der Skalen Kraft und Weitere besonders wirksam ist.

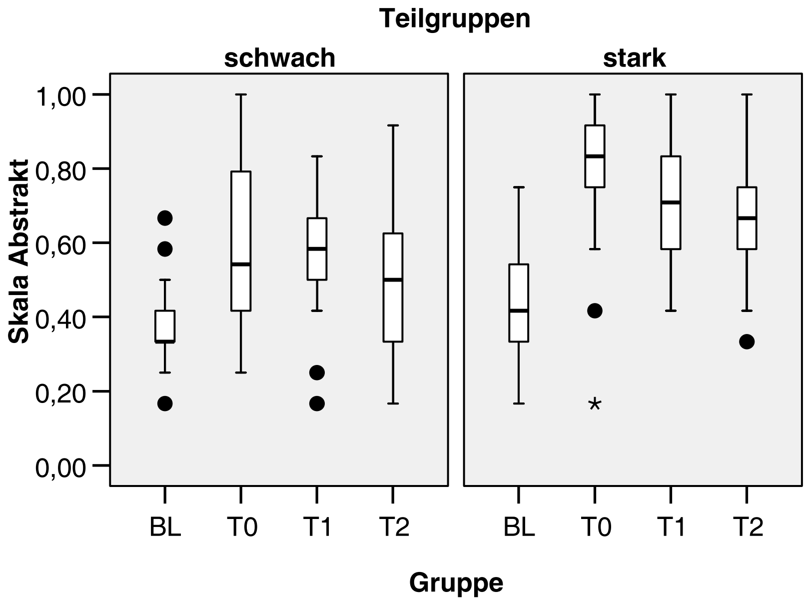


Abb. 11.1: Punktwerteverteilungen der geteilten Gruppen für die Skala Abstrakt

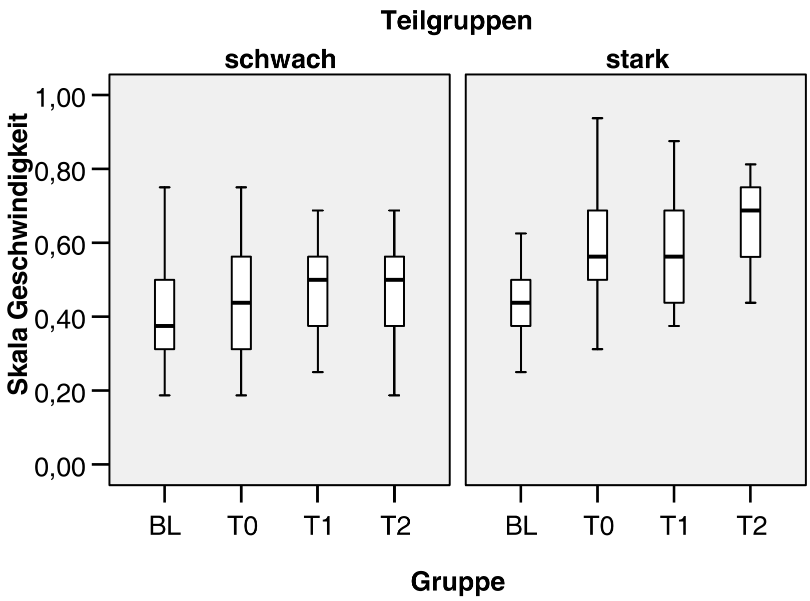


Abb. 11.2: Punktwerteverteilungen der geteilten Gruppen für die Skala Geschwindigkeit

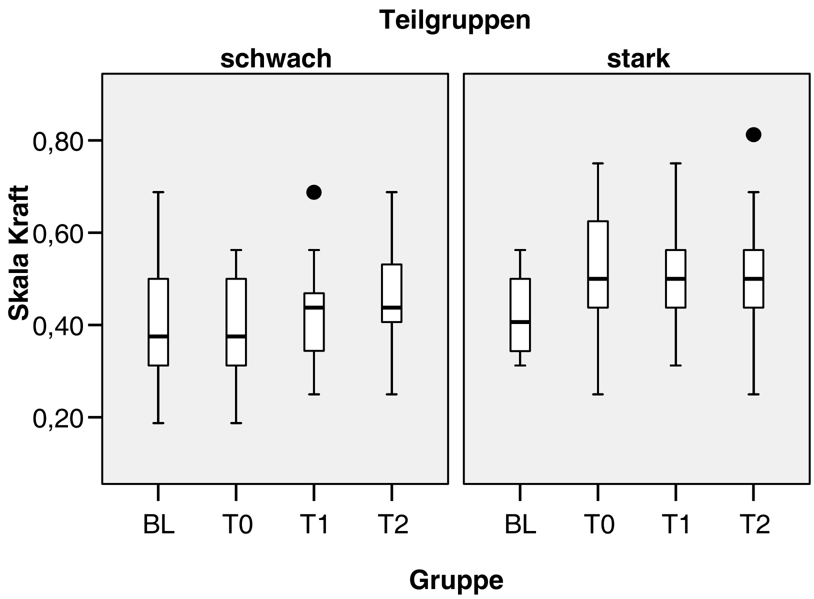


Abb. 11.3: Punktwerteverteilungen der geteilten Gruppen für die Skala Kraft

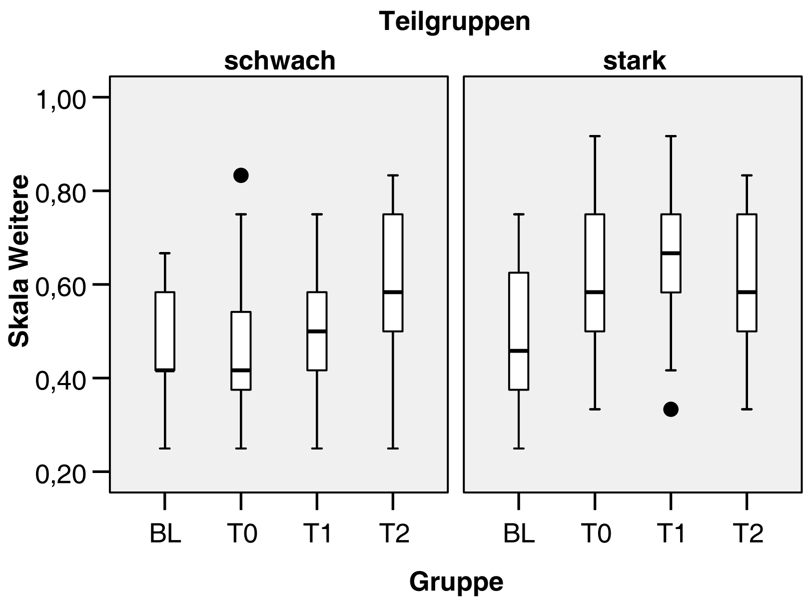


Abb. 11.4: Punktwerteverteilungen der geteilten Gruppen für die Skala Weitere

11.2 Begutachtung der Hypothesen

Um die Unterschiedlichkeit der Gruppen zu prüfen, wurden Varianzanalysen getrennt nach lernschwachen und lernstarken Teilgruppen durchgeführt.[1] Diese zeigen, dass sich die Teilgruppen bezüglich der jeweiligen Skalen mit einer Ausnahme unterscheiden ($p_{\text{2-seitig}} < .04$). Die lernschwachen Teilgruppen unterscheiden sich bezüglich der Skala Geschwindigkeit nicht signifikant ($p_{\text{2-seitig}} = .48$). Eine Berechnung der geplanten Kontraste wird für diese Skala somit überflüssig. (Details zu allen Mittelwertvergleichen finden sich im Anhang D.2.4).

Zu Hypothese 1 - Genereller Lerneffekt

Die ungeteilten Treatmentgruppen unterschieden sich signifikant von der Baselinegruppe bezüglich aller Skalen (H_1 valide: $\mu_{\text{T0} \cup \text{T1} \cup \text{T2}} > \mu_{\text{BL}}$ für alle Skalen, siehe Kapitel 10.2.3). Nach der Teilung der Gruppen ist dies nicht eindeutig, siehe Abb. 11.5. Nur die lernstarken Teilgruppen unterscheiden sich von der zugehörigen Baseline-Teilgruppe bezüglich aller Skalen ($p_{\text{1-seitig}<.00}$). Zwischen den lernschwachen Treatment-Teilgruppen und der entsprechenden Baseline-Teilgruppe besteht bezüglich der Skala Abstrakt und Weitere ein signifikanter Unterschied ($p_{\text{1-seitig}} < .04$). In Bezug auf die Skalen Kraft ($p_{\text{1-seitig}} = .38$) und Geschwindigkeit (entsprechend Varianzanalyse) sind die Teilgruppen nicht unterscheidbar. Dies bedeutet, dass die Lerneinheiten im Fall lernstarker Versuchspersonen generell zu einem Leistungsvorsprung gegenüber ununterrichteten Versuchspersonen führen. Die Lernschwachen hingegen vermögen im Zusammenhang mit den Pfeilanwendungen Geschwindigkeit und Kraft keinen Gewinn aus den Treaments ziehen, wohl aber im Fall der nicht behandelten Anwendungen der Skala Weitere und bei abstrakten Fragestellungen.

Es sei an dieser Stelle angeführt, dass ein Vergleich der lernschwachen und lernstarken Baseline-Teilgruppe zeigt, dass sich diese bezüglich aller Skalen nicht unterscheiden (T-Test, $p_{\text{2-seitig}} > .1$), wie es schon in der Punktwerteverteiltung zu erahnen war (Details siehe Anhang D.2.5). Der Erfolg im Nachtest ist also im Wesentlichen durch die Teilnahme an einem Treatment bestimmt. Intelligenz und Vorwissen allein sind nicht ausreichend, um im

[1] Bis auf eine Ausnahme sind die Varianzen homogen. Bezüglich der Skala Abstrakt sind für die lernschwachen Teilgruppen korrigiertes Verfahren benutzt worden. Die Punktwerteverteiltungen sind normalverteilt, nur bezüglich der abstrakten Skala ist die Verteilung der lernstarken Teilgruppe von T0 zu schmal, um den Kriterien einer Normalverteilung zu entsprechen. Mögliche Einflüsse fallen konservativ aus und sind somit im Rahmen einer Exploration vernachlässigbar. Details zu den Normalverteilungen siehe Anhang D.2.3

Nachtest erfolgreich zu sein. Dies spricht für die Validität des Tests.

Zu Hypothese 2 - Mathematisch-abstrakte Leistung

Für die ungeteilten Gruppen konnte bisher gezeigt werden, dass sich der abstrakt-mathematische Unterricht der Gruppe T0 positiv auf die durch die Skala Abstrakt gemessene Leistung auswirkt (H_{2a} valide: $\mu_{\mathrm{T0}} > \mu_{\mathrm{T1} \cup \mathrm{T2}}$ für Skala Abstrakt). Durch die Teilung der Gruppen wird sichtbar, dass dies auf einen Leistungsvorsprung lernstarker Versuchspersonen zurückzuführen ist. Der Kontrast für die lernschwachen Versuchspersonen zeigt keinen signifikanten Unterschied, siehe Abb. 11.6 (Lernschwache H_{2b} nicht valide:$p_{\text{1-seitig}} = .26$, Lernstarke $p_{\text{1-seitig}} = .00$). Folglich bringt der abstrakt-mathematische Unterricht lernschwachen Versuchspersonen selbst bei anwendungsfreien Aufgaben keinen Vorteil gegenüber anwendungsbezogenem Unterricht.

Entgegen der Hypothese H_{2b} zeigte sich zwischen den beiden Anwendergruppen eine knapp signifikante Differenz im Fall abstrakter Aufgaben ($\mu_{\mathrm{T1}} \neq \mu_{\mathrm{T2}}$ für Skala Abstrakt). Mit der Teilung der Gruppen verschwindet dieser Unterschied, siehe Abb. 11.7 (Lernschwache $p_{\text{2-seitig}} = .07$, Lernstarke $p_{\text{2-seitig}} = .75$). Es hat keinen Einfluss auf die Leistung bei abstrakten Aufgaben, ob eine oder mehrere Anwendungen im Unterricht behandelt worden sind.

Zu Hypothese 3 - Nahtransfer

Bisher konnte die elementare Hypothese, dass die Bekanntheit einer Pfeilanwendung bei Aufgaben mit genau dieser Anwendung zu höheren Punktwerten führt, nicht empirisch belegt werden. (H_{3a} nicht valide: $\mu_{\mathrm{T1} \cup \mathrm{T2}} \not> \mu_{\mathrm{T0}}$ für Skala Geschwindigkeit, $\mu_{\mathrm{T2}} \not> \mu_{\mathrm{T0} \cup \mathrm{T1}}$ für Skala Kraft). Die Teilung der Gruppen bringt mit Blick auf die Probleme mit Skala Geschwindigkeit keine weiteren Erkenntnisse. Der Vergleich zeigt für beide Teilgruppen keine Unterschiede an, siehe Abb. 11.6 (Lernschwache entsprechend der Varianzanalyse, Lernstarke $p_{\text{1-seitig}} = .19$). Die Lernstarken können zwar bis zu einem bestimmten Grad Aufgaben mit Geschwindigkeitspfeilen beantworten und dabei auch allgemein von ihren Treatments profitieren, die Art der Treatments spielt jedoch keine Rolle. Das bedeutet insgesamt, dass die Bekanntheit der Geschwindigkeitspfeile nicht zu höheren Punktwerten bei Aufgaben mit dieser Pfeilanwendung führt.

Anders verhält es sich für die Skala Kraft. Hier zeigt sich mit der Teilung der Gruppen, dass die schwachen Teilgruppen im Sinne der Hypothese 3a signifikant verschieden sind. Die lernstarken Teilgruppen zeigen diesen Unterschied nicht, siehe Abb. 11.6 (Lernschwache $p_{\text{1-seitig}} < .00$, Lernstarke

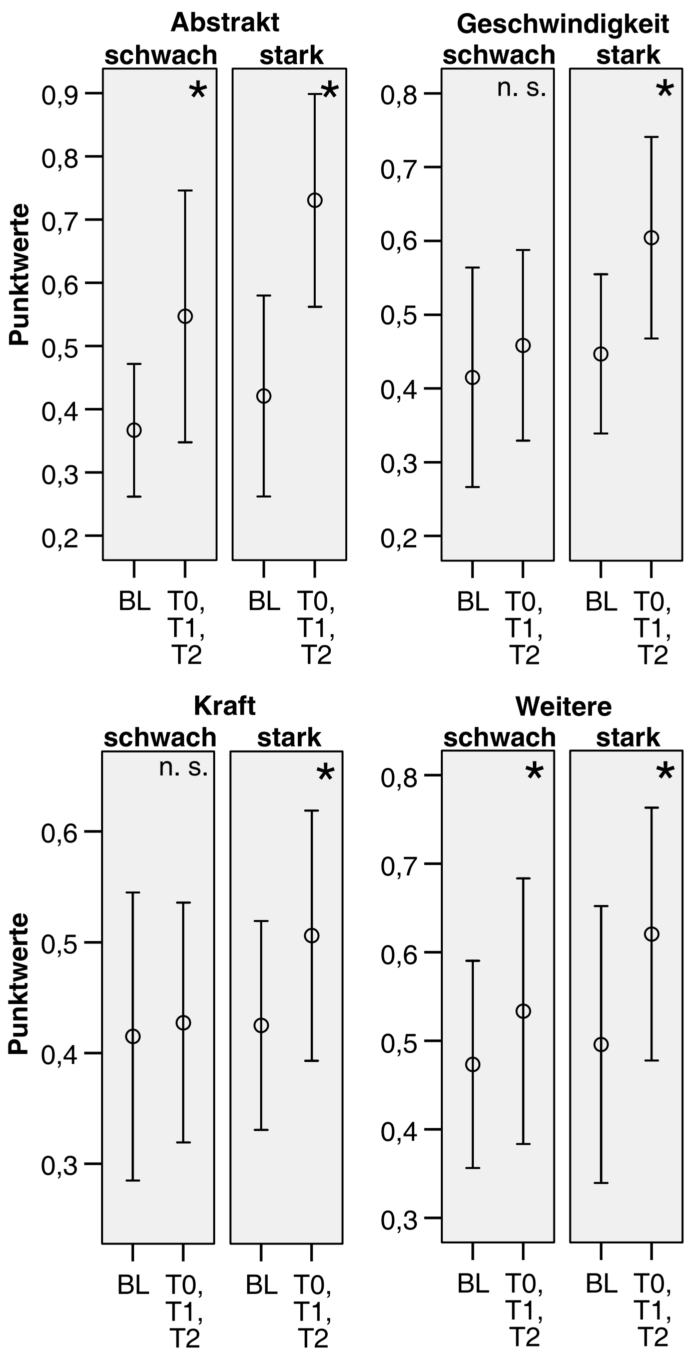


Abb. 11.5: Erster Kontrast, getrennt nach lernstarken und lernschwachen Teilgruppen.

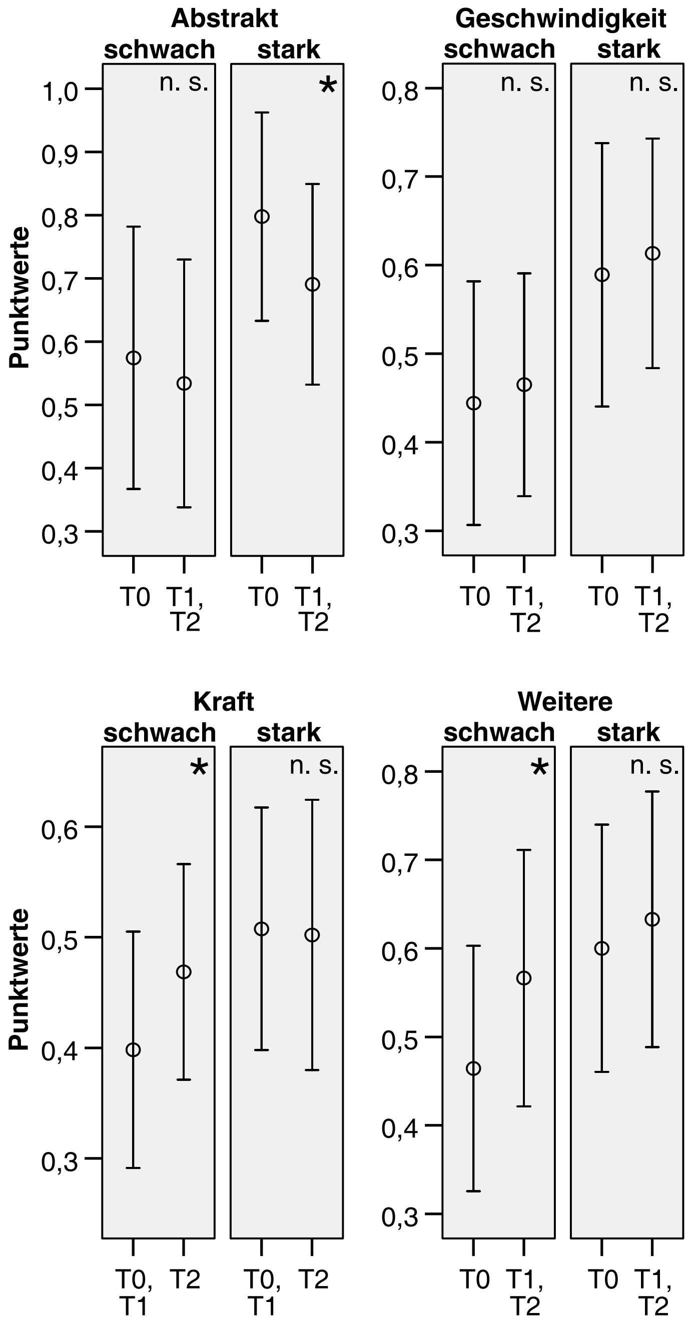


Abb. 11.6: Zweiter Kontrast, getrennt nach lernstarken und lernschwachen Teilgruppen.

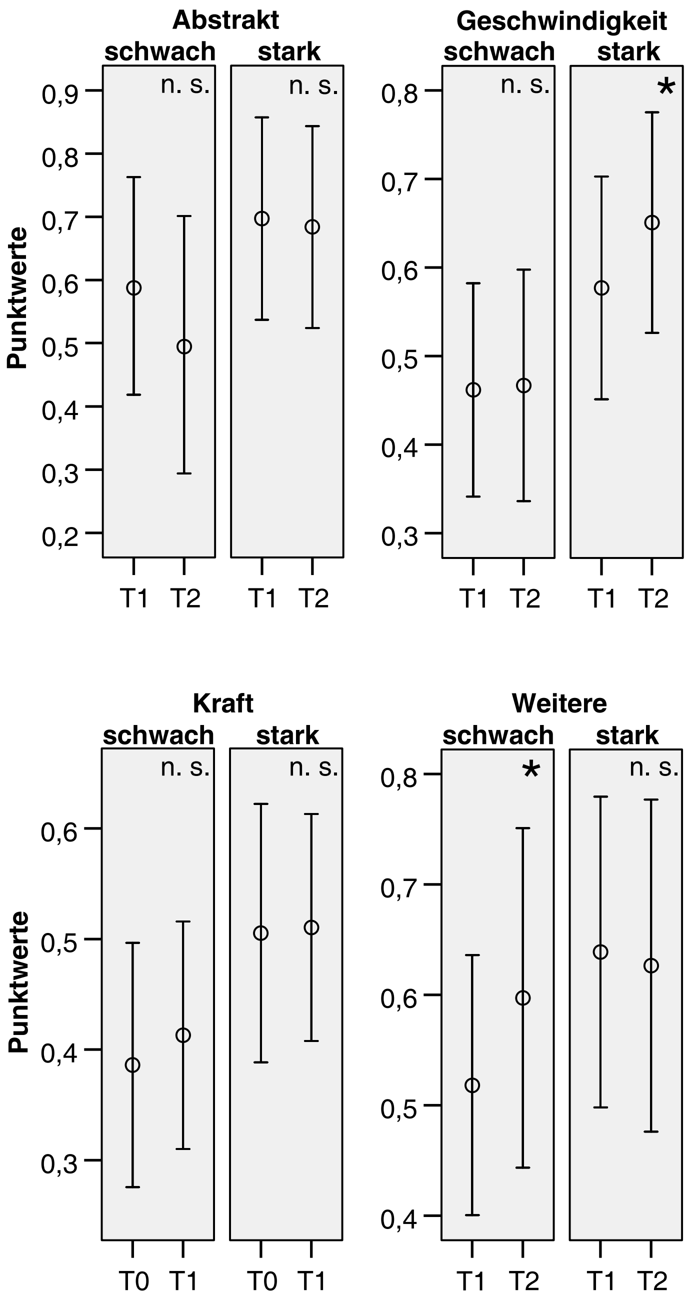


Abb. 11.7: Dritter Kontrast, getrennt nach lernstarken und lernschwachen Teilgruppen

$p_{\text{1-seitig}} = .41$). Die Kenntnis der Kraft als Pfeilanwendung wirkt sich also im Fall lernschwacher Versuchspersonen positiv auf deren Leistung im Zusammenhang mit Kraftaufgaben aus. Die Leistungen der starken Versuchspersonen unterscheiden sich im Hinblick auf die besuchten Lerneinheiten nicht. Sie können wieder aus jedem Unterricht Nutzen ziehen.

Irritierende Konsequenzen hat die Teilung der Gruppen für die Hypothese 3b. Es wird deutlich, dass die Gleichheit der ungeteilten Gruppen (H_{3b} valide: $\mu_{T1} = \mu_{T2}$ für Skala Geschwindigkeit) lediglich auf der Gleichheit der lernschwachen Versuchspersonen beruhte. Die lernstarken Teilgruppen unterscheiden sich signifikant, siehe Abb. 11.7 (Lernstarke $p_{\text{2-seitig}} = .03$, Lernschwache entsprechend der Varianzanalyse). Eine Deutung dieser Ergebnisse ist schwierig. Die Treatments unterscheiden sich bezüglich des Inhalts der Geschwindigkeit nicht. Die Differenz lässt sich nur durch eine Unausgeglichenheit der Schulklassen durch den vorangegangenen Schulunterricht erklären. Die Lehrerbefragung (Kapitel 9.1) gibt in der Hinsicht keine Hinweise.

Zu Hypothese 4 - Ferntransfer

Nach der Kernhypothese 4a sollten Versuchspersonen Wissen um die Verwendung von Pfeilen zur Darstellung einer physikalischen Größe von einem bekannten Anwendungsbereich auf eine unbekannte Anwendung transferieren können. Anhand der Skala Weitere konnte dies gezeigt werden, da ein Anwendungen umfassender Unterricht hier zu höheren Punktwerten führte (H_{4a} valide: $\mu_{T1 \cup T2} > \mu_{T0}$). Für die geteilten Gruppen zeigt sich, dass dieser Unterschied nur bei lernschwachen Versuchspersonen zu finden ist, siehe Abb. 11.6 (Lernschwache $p_{\text{1-seitig}} < .00$, Lernstarke $p_{\text{1-seitig}} = .15$). Demnach profitieren im Fall der unbekannten Pfeilanwendungen Ort und Verschiebung nur die lernschwachen Versuchspersonen von einem Unterricht, der andere Pfeilanwendung thematisiert. Es ist jedoch zu betonen, dass der Unterschied von T0 zu den gebündelten Gruppen T1 und T2 aus dem deutlichen Punktevorsprung der Gruppe T2 resultiert, der bis an das Niveau der leistungsstarken Versuchspersonen heranreicht, siehe Abb. 11.4 auf S. 121. Paarvergleiche, die als Post-hoc-Analyse methodisch für eine Exploration zulässig sind, zeigen, dass sich die Gruppen BL, T0 und T1 gleichen ($p_{\text{BL vs. T0}} = .81$, $p_{\text{BL vs. T1}} = .26$, $p_{\text{T0 vs. T1}} = .16$), sich jedoch jede einzelne von T2 unterscheidet ($p_{\text{T2 vs. BL}} = .00$, $p_{\text{T2 vs. T0}} = .00$, $p_{\text{T2 vs. T1}} = .03$, siehe Anhang D.2.6). Dies umfasst auch den Kontrast T1 versus T2 zur Hypothese 4b für die schwache Teilgruppe (T2 vs. T1: $p_{\text{1-seitig}} = .02$). Die starken Teilgruppen unterscheiden sich bei dieser Gegenüberstellung nicht ($p_{\text{1-seitig}} = .37$). Das bedeutet für die lernschwachen Versuchspersonen, dass die Lerneinheit, die Kraft- und Geschwindigkeitspfeile thematisiert, im Zusammenhang mit Aufgaben zum Ort und zur Verschiebung zu signifikant besseren Ergebnissen führt, als ein Unterricht, der nur Geschwindigkeitspfeile oder abstrakte Pfeile behandelt. Ein Unterricht, der zwei Anwendungen beinhaltet, ermöglicht es also schwachen Schülerinnen und Schülern in Transferaufgaben ähnliche Leistungen zu erzielen, wie lernstarke Personen, die am selben Unterricht teilgenommen haben. Für lernstarke Personen ist die Behandlung von Anwendungen im Unterricht nicht von entsprechender Bedeutung.

Die Betrachtung des Ferntransfers im Zusammenhang mit der Anwendung Kraft bringt in der Hinsicht keine weiteren Informationen, da nur Gruppen mit maximal einer Anwendung beteiligt sind. Für die ungeteilten Gruppen zeigte sich keine Differenz zwischen den Gruppen T0 und T1 (H_{4a} nicht valide: $\mu_{T1} \not> \mu_{T0}$ für Skala Kraft) und auch für die geteilten Gruppen ist der Unterschied nicht signifikant (schwache Teilgruppe $p_{\text{1-seitig}} = .19$, starke Teilgruppe $p_{\text{1-seitig}} = .43$).

11.3 Zusammenfassung

Durch die explorative Analyse der erhobenen Daten wird ein detaillierterer Einblick in die zuvor durchgeführte Hypothesenprüfung möglich. Um potenzielle Ursachen wie Über- und Unterforderung für die teilweise nicht zu klärenden Ergebnisse zu aufzudecken, wurden die Versuchspersonen anhand ihres Vortestergebnisses in Fraktionen von Lernstarken und Lernschwachen eingeteilt. Die Wirksamkeit der Pfeile als mentale Werkzeuge lässt sich so in Abhängigkeit der Lernfähigkeit prüfen.

In der Gesamtheit zeigen sich deutliche Unterschiede in den Punktwerteverteilungen der geteilten Treatmentgruppen. Grundsätzlich können lernstarke Personen aufgrund der Lerneinheiten höhere Punktwerte erreichen als lernschwache. Diese profitieren teilweise gar nicht vom Unterricht. Die Gegenüberstellung der lernstarken Treatment-Teilgruppen im Rahmen des Nahtransfers zeigt keine bedeutsamen Differenzen. Nur bei abstrakten Aufgaben ist ein Vorsprung durch den darauf ausgerichteten abstrakten Unterricht sichtbar. Im Bereich des Ferntransfers sind keine Gruppendifferenzen vorhanden. Das bedeutet, dass die lernstarken Versuchspersonen unabhängig von der Anzahl der behandelten Pfeilanwendungen stets vom Unterricht profitieren und anschließend Pfeile in unterschiedlichen Anwendungen gleichermaßen benutzen können.

Bei den lernschwachen Probanden zeigen die Treatments unterschiedliche Wirkungen. Im Rahmen der Vergleiche mit geringen Transferanforderungen ist zu erkennen, dass sich die explizite Behandlung der Kraftpfeile positiv auf die Leistung bei Kraftaufgaben auswirkt. Dieser elementare Effekt konnte bisher nicht anhand einer Pfeilanwendung sichtbar gemacht werden. Durch die Teilung der Gruppen ergibt sich auch für den Ferntransfer ein klareres Bild. Die Vergleiche, die die unbekannten Anwendungen Ort und Verschiebung betreffen, zeigen, dass die Versuchspersonen, die zwei Anwendungen im Unterricht kennen gelernt haben, bessere Ergebnisse erreichen als Personen ohne beziehungsweise mit einer einzigen Anwendung im Treatment. Der fehlende Unterschied bezüglich der Kraftskala zwischen den Gruppen, die ebenfalls keine oder eine Anwendung behandelt haben, passt dabei ins Bild.

Die explorative Analyse begründete die Hypothese, dass Pfeile als mentale Werkzeuge funktionieren, wenn der Unterricht anhand mehrerer physikalischer Größen die Anwendung der Pfeile für die schwachen Schülerinnen und Schülern hervorhebt. Diese können dadurch Pfeile in unbekannten Anwendungsbereichen genauso erfolgreich verwenden wie lernstarke Schülerinnen und Schüler. Diese hingegen vermögen sich die flexible Anwendung der Pfeile selbst zu erschließen und bedürfen der genannten Betonung nicht. Pfeile können folglich für starke und schwache Schülerinnen und Schüler Transfer fördernd wirksam sein.

Kapitel 12

Schluss

12.1 Zusammenfassung

Der Pfeil ist ein Symbol mit zahlreichen Nutzungsoptionen. Diese reichen von alltäglichen Richtungshinweisen bis zu detaillierten Darstellungs- und Mathematisierungskonzepten. Für Vektorpfeile, also gezeichnete Pfeile, die nach den Regeln der Vektorrechnung manipuliert werden, existieren zahlreiche, vielversprechende Verwendungsvorschläge zu unterschiedlichen Themen der schulischen und universitären Physik. Das Hauptaugenmerk bisheriger und aktueller didaktischer Forschungsarbeiten liegt auf einzelnen physikalischen Themen, insbesondere der Mechanik, und deren Vermittlung mithilfe von Pfeilen. Hingegen liefert die vorliegende Arbeit eine allgemeinere, übergreifendere Analyse der Vektorpfeile. Wie auch andere Symbolsysteme lassen sich Vektorpfeile aus der psychologischen Theorie heraus als mentale Werkzeuge identifizieren. Das heißt, dass mit ihnen wie mit einem gegenständlichen Werkzeug agiert und gearbeitet werden kann und sich Produkte in Gestalt von Problemlösungen und neuem Wissen hergestellt lassen. Vektorpfeile bieten dem Handelnden durch Definitionen und Regeln Strukturierungshilfe und vor allem ein Magazin an Prozeduren. Damit werden neue Handlungsoptionen eröffnet und abstrakte Modelle realer Situationen möglich gemacht. Das Wissen um die Möglichkeiten der Vektorpfeile sollte nicht an spezielle Inhalte und Kontexte gebunden sein, sondern abstrakt und kompakt gespeichert sein, um in neuen, unbekannten Situationen zur Verfügung zu stehen.

Es war die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit, Pfeile als Transfer fördernd und somit als mentale Werkzeuge empirisch nachzuweisen. Eine Feldstudie wurde entworfen und umgesetzt. Dafür wurden Unterrichtseinheiten und Tests entwickelt, erprobt und an mehreren Schulen umgesetzt. Drei Versuchsgruppen, denen das Konzept der Vektorpfeile mit ein, zwei beziehungsweise ohne physikalische Anwendungen der Pfeile gelehrt wurde, wurden gegenübergestellt. Eine erhöhte Anzahl an Pfeilanwendung betont die Inhaltsunabhängigkeit und Flexibilität der Pfeile und schult sie im Sinne eines mentalen Werkzeugs. Eine Transfer fördernde Wirkung sollte sich im abschließend durchgeführten Leistungstest bei Aufgaben mit unbekannten Pfeilanwendungen zeigen.

Die Ergebnisse dieses Nachtests sind nicht durchgängig stimmig. Zwar zeigen alle drei Lerneinheiten eine Wirkung auf die Leistung der Versuchspersonen, jedoch führt das Wissen um die Pfeilanwendungen Geschwindigkeit und Kraft nicht zu besseren Ergebnissen bei den Aufgaben, die diese Anwendungen beinhalten. Im Bereich des Ferntransfers zeigt sich bezüglich einer Skala, dass ein mehrere Anwendungen umfassender Unterricht zu besseren Leistungen bei Aufgaben mit anderen unbekannten Anwendungen führt. Das bedeutet, dass in diesem Fall Pfeile als mentale Werkzeuge funktionieren. Wenn sich die Lerneinheiten der gegenübergestellten Gruppen um nur eine Anwendung unterscheiden, ist kein Effekt sichtbar.

Fehlende Effekte bei den Anwendungen Geschwindigkeit und Kraft im Anforderungsbereich von Nah- und Ferntransfer sprechen dafür, dass die Art der Anwendung einen Einfluss auf die im Test gezeigten Leistungen hat. Neben den Kenntnissen zu Vektorpfeilen scheint weiteres physikalisches Wissen notwendig zu sein, da sich im Zusammenhang mit den weniger anspruchsvollen Anwendungen Ort und Verschiebung ein Effekt beim Ferntransfer zeigt. Es lässt sich nicht sagen, ob es hierbei um eine Schwäche des Tests oder um eine prinzipielle Einschränkung der Nutzung von Pfeilen bei diesen Anwendungen geht.

In einer explorativen Analyse werde die erhobenen Daten in Abhängigkeit der Lernleistung der Versuchspersonen tiefergehend untersucht. Dabei wird deutlich, dass lernstarke Versuchspersonen von jedem Unterricht profitieren und in allen Fällen gleichermaßen hohe Punktwerte erreichen. Dies lässt sich positiv deuten, da die Pfeile von diesen Personen flexibel, also von Anwendungen unabhängig, genutzt werden. Es ist jedoch kritisch einzuwenden, dass der Test grundsätzlich erwartete Leistungsunterschiede nicht aufzulösen vermag. Die lernschwachen Personen profitieren insgesamt wenig von den Lerneinheiten. Es ist jedoch auffällig, dass sie im Fall von unbekannten Anwendungen das Leistungsniveau der Lernstarken erreichen, wenn sie am Unterricht mit zwei Anwendungen teilgenommen haben. Dieser Befund unterstreicht, dass Vektorpfeile, die als flexible Darstellungsform unterrichtet worden sind, transferwirksam sind und als mentale Werkzeuge funktionieren.

12.2 Konsequenzen

Didaktische Forschung

Mit der durchgeführten Studie konnte anhand mechanischer Größen gezeigt werden, dass Vektorpfeile als mentale Werkzeuge funktionieren können. Es deutet sich jedoch auch an, dass die Art der Anwendung Einfluss auf den Transfer von Wissen zu haben scheint. Es wäre zukünftig zu klären, ob und warum bestimmte Anwendungen fördernd, andere hindernd wirksam sind. Eine Antwort könnte eine Studie liefern, die Lerneinheiten gegenüberstellt, die sich in der Art, nicht jedoch in der Anzahl der Anwendungen unterscheiden. Auch wäre eine Studie denkbar, die die Reihenfolge behandelter Anwendungen variiert und so Transfer fördernde Zusammenhänge aufdeckt. Für weitere Untersuchungen zu Vektorpfeilen im Mechanikunterricht ist es notwendig, die entwickelten Messinstrumente zu verbessern. Es ist deutlich geworden, dass eine Differenzierung der Gruppen bezüglich der Skalen Geschwindigkeit und Kraft bei grundsätzlich zu erwartenden Leistungsunterschieden, insbesondere bei der leistungsabhängigen Teilung der Gruppen, nicht gelingt. Des Weiteren wäre der Einfluss von physikalischem Wissen auf die Beantwortung der Items zu prüfen. Ein detailliere Itemanalyse wäre der erste Schritt.

Bisher ist das Potenzial der Pfeile ausschließlich in der Mechanik erprobt worden. Es ist weitergehend von Interesse, ob Pfeile auch Themen übergreifend als mentale Werkzeuge empirisch nachweisbar sind. Eine Kernfrage ist, ob, ausgehend von einem anwendungsreichen Unterricht zu gerichteten mechanischen Größen, auch ein Transfer von Wissen in die Bereiche der Phasenzeiger der Optik oder Quantenphysik möglich ist.

Schule

Auch wenn die Studie viele Fragen unbeantwortet lassen muss, zeigen die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit, dass die Verwendung von Vektorpfeilen im Mechanikunterricht sinnvoll ist. Wissen über Vektorpfeile ist nicht prinzipiell auf einen speziellen Bereich festgelegt, sondern kann transferiert werden. Damit wäre es im späteren Schulunterricht bei neuen, unbekannten Problemstellungen verfügbar. Um Vektorpfeile als mentale Werkzeuge zu vermitteln, sollten sie, das lässt sich aus der Studie als konkrete Unterrichtsempfehlung ableiten, durch einen Unterricht eingeführt werden, der die Darstellung verschiedener physikalischer Größen umfasst. Dies gilt insbesondere im Hinblick auf die Leistungen der schwachen Schülerinnen und Schüler. Dieser Unterricht muss dabei nicht den durchgeführten Lerneinheiten entsprechen, denn diese sind nicht als Unterricht, sondern als klar gegeneinander abgesetzte

Treatments entworfen worden. Zwar hat sich bei der Durchführung an den Schulen gezeigt, dass sie im Schulgeschehen funktionieren, jedoch unterlagen die Treatments Beschränkungen, die für den realen Physikunterricht nicht gelten. So können auch die Anwendungen Ort und Verschiebung im Unterricht thematisiert werden, die in der Studie für den Test zurückzuhalten waren. Außerdem ist denkbar, Elemente aus dem abstrakten Treatment in den Schulunterricht zu übernehmen, um den rechnerischen Umgang zu üben und auch Vertauschungsregeln zu thematisieren, denn die abstrakt unterrichteten Gruppen haben bei abstrakten Aufgaben stets hohe Ergebnisse erzielt.

Dass Pfeile aus strukturellen und methodischen Gründen anderen Darstellungen in verschiedenen Themenbereichen vorzuziehen sind, konnte anhand vorangegangener und aktueller Arbeiten anderer Autorinnen und Autoren dargelegt werden. Da sich Vektorpfeile als mentales Werkzeug nicht auf Spezialfälle beschränken, sondern themen- und jahrgangsübergreifend sinnvoll sind, das heißt Strukturierung und Mathematisierung ermöglichen, ist es möglich mit ihnen den Physikunterricht zu vernetzen. Auch in anderen Unterrichtsfächern lassen sich Anknüpfungspunkte finden, durch die sich Vektorpfeile vorbereiten beziehungsweise weiterführen lassen. Es sollte ein Ziel des Physikunterrichts sein, das beachtliche Potenzial der gezeichneten Pfeile zu nutzen und sie als vielfältige, flexible Darstellungsform zu vermitteln, um den Schülerinnen und Schülern so ein effizientes Werkzeug an die Hand zu geben.

Anhang A

Statistische Verfahren

A.1 Signifikante Unterschiede

Es ist das Ziel der vergleichenden Studie, Leistungsunterschiede zwischen den Versuchspersonen auf die Teilnahme der Versuchspersonen an bestimmten Treatments zurückführen zu können (siehe Kapitel 5). Dazu ist durch einen Signifikanztest zu prüfen, ob die gemachten Beobachtungen als sicher einzuschätzen sind oder ob die Beobachtung auch in einem nicht vertretbar Maß zufällig hätten zustande kommen können. Es ist dabei zwischen der gewählten Stichprobe und der Gesamtpopulation zu unterscheiden. An einer Untersuchung nimmt nur eine begrenzte Anzahl von Personen teil, in diesem Fall sind es ungefähr zweihundert Schülerinnen und Schüler von drei Berliner Schulen. Durch die Studie soll jedoch eine Aussage über Schülerinnen und Schüler allgemein getroffen werden. Um den Fehler bestimmen zu können, muss abgeschätzt werden, wie groß die Schwankungen der Leistungsmittelwerte verschiedener Stichproben um den wahren, unbekannten Leistungmittelwert der Gesamtpopulation anzunehmen sind. Grundlage dieser Abschätzung sind letztendlich die Schwankungen der von den Versuchspersonen erbrachten Leistungen. Es gilt (Details siehe Bortz (1999), S. 91):

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{\bar{x}}^2 &= \tfrac{1}{n}\hat{\sigma}^2 \\
\hat{\sigma}^2 &= \tfrac{n}{n-1}s^2 \\
s^2 &= \tfrac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2
\end{aligned}$$

($\hat{\sigma}_{\bar{x}}^2$: Varianz des Mittelwertes, $\hat{\sigma}^2$: geschätzte Populationsvarianz, n: Gesamtanzahl Personen, s^2: Stichprobenvarianz; x_i: Punktwert der Versuchsperson i).

Im Fall einer hypothesenprüfenden Untersuchung existieren aufgrund von vorangegangenen Untersuchungen eine oder mehrere Forschungshypothesen, die sich als zwei sich gegenseitig ausschließende statistische Hypothesen, der Nullhypothese und der Alternativhypothese, formulieren lassen. Im Fall der Gültigkeit der Nullhypothese ist die Teilnahme an einem bestimmtem Treatment unbedeutend, damit sind die Unterschiede zwischen den Versuchspersonen der Stichprobe zufällig und die Leistungsmittelwerte der Gesamtpopulation statistisch nicht unterscheidbar. (Die Leistungsmittelwerte der Stichprobe müssen dazu nicht zwingend gleich sein.) Im Fall der Gültigkeit der Alternativhypothese spielen die Inhalte der Unterrichtseinheiten eine Rolle, die Unterschiede zwischen Versuchspersonen der Stichprobe sind nicht zufällig und die Leistungsmittel bezogen auf die Gesamtpulation sind verschieden. Durch diese Konstruktion ist es logisch zwingend, dass aus dem Verwerfen der Nullhypothese aufgrund von Messergebnissen die Gültigkeit der Alternativhypothese folgt. Es reicht also aus, sich rechnerisch ausschließlich mit der Nullhypothese zu beschäftigen, und demzufolge die Gleichheit der Mittelwerte zu überprüfen.

Im Zuge des Signifikanztest wird geschätzt, wie wahrscheinlich das Eintreten des Messergebnisses ist. Ist die Wahrscheinlichkeit für das gemessene Ergebnisse und extremere insgesamt über 5 %, wird in den Sozialwissenschaften üblicherweise von einem zufälligen Ergebnis ausgegangen. Die Messergebnisse sind also im Sinne der Nullhypothese plausibel. Ist die Wahrscheinlichkeit für das gemessene Ergebnisse und extremere insgesamt kleiner gleich 5 %, sind diese nicht mit der Nullhypothese verträglich. Die Alternativhypothese muss wahr sein, die Gruppenzugehörigkeit der Versuchspersonen ist also von Bedeutung. Das Ergebnis eines Signifikanztests ist letztendlich die Entscheidung für eine der beiden Hypothesen. Für den Vortest ist es im Sinne der Studie, dass die Nullhypothese gilt und alle Gruppen insofern gleich sind, als dass die einzelnen Abweichungen im Rahmen des Zufälligen liegen. Für den Nachtest ist es gewünscht, dass die Nullhypothese zu verwerfen ist und sich die gemessenen Abweichungen vom Mittelwert nicht mit einer Gleichheit der Gruppen vereinbaren lässt.

Bei den Hypothesen des Nachtests der Studie ist zwischen gerichteten und ungerichteten (einseitigen und zweiseitigen) Hypothesen zu unterscheiden. Ungerichtete Hypothesen machen lediglich eine Aussage über eine unspezifische Ungleichheit Gruppen, während eine gerichtete Hypothese eine Aussage über die Richtung des Unterschiedes macht (siehe Bortz 1999, Kap. 4.5, Field 2005, Kap. 1.8.2.).[1] Im Fall der Studie sind die Hypothesen meist gerichtet formuliert, da sich durch einen speziellen Unterricht nicht nur eine andere,

[1] Es ist zu beachten, dass sich die von der Software SPSS berechneten Signifikanzen standardmäßig auf ungerichteten Hypothesen beziehen und im Fall gerichteter Hypothesen durch zwei zu dividieren sind.

sondern eine bessere Leistung einstellen soll.

Neben der Signifikanz spielt die Effektstärke eine entscheidende Rolle für die Bewertung der Gruppenunterschiede. Während der Signifikanztest eine Aussage darüber macht, ob ein Leistungsunterschied auch zufällig zustande gekommen sein kann, betrifft die Effektstärke die praktische Relevanz eines Leistungsunterschiedes. Die Einführung einer neuen Unterrichtsmethode ist zum Beispiel nur dann lohnenswert, wenn eine hohe Effektstärke den Arbeitsaufwand rechtfertigt. Die Effektstärke berechnet sich aus der Differenz der Mittelwerte und dem geschätzten Standardfehler (Bortz, 1999, Kap. 4.6 und S. 757):

$$r = \left| \frac{\mu_1 - \mu_2}{\hat{\sigma}} \right|$$

Für die geplanten Kontraste der Studie berechnet sich die Effektstärke direkt aus dem t-Wert des Tests (Field, 2005, S. 358):

$$r = \sqrt{\frac{t^2}{t^2 + df}}$$

Als Richtwerte gelten $r = .1$ für kleine, $r = .3$ für mittlere und $r = .5$ für starke Effekte (Field, 2005, S. 32 & 285). Die t-Werte sind in den entsprechenden Tabellen aufgelistet.

A.2 Varianzanalyse

Im Fall des für die Studie gewählten Designs ist es notwendig, die Mittelwerte der verschiedenen Gruppen mit einem einzigen Signifikanztest auf Gleichheit zu prüfen. Der paarweise Vergleich der Gruppenmittelwerte der jeweiligen Skalen, dies wären sechs Vergleiche für vier Gruppen pro Skala, ist nicht zulässig, da das 5-%-Kriterium insgesamt und nicht für sechs einzelnen Vergleich erfüllt sein muss (α-Fehler-Kumulation, siehe Field, Kapitel 8, Bortz Kapitel 7). Eine Varianzanalyse macht eine eindeutige Entscheidung zugunsten oder gegen die Nullhypothese im Rahmen der Wahrscheinlichkeit von 5 % möglich. Am Ende steht die Entscheidung für die Nullhypothese oder für die Alternativhypothese, ohne jedoch im Detail sagen zu können, wie genau dieser Unterschied gestaltet ist.

Mathematisch lässt sich das Verfahren der Varianzanalyse wie folgt umreißen: Den Kern bildet der Vergleich von summierten Abständen der Punktwerte der Versuchspersonen zum Gruppenmittelwert bzw. zum Gesamtmittelwert. Der Punktmittelwert A_i einer Gruppe i mit n Versuchspersonen mit individuellen Punktwerten x_i ist

$$\bar{A}_i = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} x_{m,i}$$

Der Gesamtmittelwert $\bar{G}$ ist im hier vereinfachten Fall von Gruppen mit gleicher Versuchspersonenanzahl[2]:

$$\bar{G} = \frac{1}{4} \sum_{i} \bar{A}_i$$

Verschiedene Quadratsummen sind von Relevanz:

$$\begin{aligned} QS_{\text{treat}} &= \sum_{i} \left(\bar{A}_i - \bar{G}\right)^2 \\ QS_{\text{tot}} &= \sum_{i,m} \left(x_{m,i} - \bar{G}\right)^2 \\ QS_{\text{error}} &= \sum_{i,m} \left(x_{m,i} - \bar{A}_i\right)^2 \end{aligned}$$

Der Zusammenhang der geschätzten Populationsvarianzen $\hat{\sigma}^2$ mit den jeweiligen Quadratsummen QS ist $\hat{\sigma}^2 = QS/df$ mit den Freiheitsgraden df. Die Freiheitsgrade zur Bestimmung der Varianzen berechnen sich aus der Anzahl der Personen n und der Anzahl der Gruppen p:

$$\begin{aligned} df_{\text{treat}} &= p - 1 \\ df_{\text{tot}} &= pn - 1 \\ df_{\text{error}} &= p(n-1) \end{aligned}$$

Es gilt $df_{\text{tot}} = df_{\text{treat}} + df_{\text{error}}$ (Bortz, 1999, Kap. 7). Die Treatmentquadratsumme QS_{treat} fasst die Abstände der Gruppenmittelwerte zum Gesamtmittelwert zusammen. Dieses sind die Differenzen, die sich auf die Treatments zurückführen lassen. Die totale Quadratsumme steht für die Differenzen der von den einzelnen Versuchpersonen erzielten Punktwerte zum Gesamtmittelwert. Die Fehlerquadratsumme steht für die Abweichungen der einzelnen Versuchspersonen vom eigenen Gruppenmittelwert, sie steht für die nicht auf die Treatments zurückführbaren Abweichungen der Versuchsperson bezogenenen Messwerte. Es gilt: $QS_{\text{tot}} = QS_{\text{treat}} + QS_{\text{error}}$.[3] Die sogenannte Varianzaufklärung ist der Quotient $QS_{\text{treat}}/QS_{\text{tot}}$, also das Verhältnis der Abweichungen,

[2]Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden die Formeln für gleichgroße Gruppen aufgeführt. In den Auswertungen der Messergebnisse werden die Unterschiede in der Gruppengröße durch die Software SPSS berücksichtig.

[3]Für den Fall der Nullhypothese gilt: $\hat{\sigma}^2_{\text{treat}} = \hat{\sigma}^2_{\text{error}}$, für die Alternativ-Hypothese: $\hat{\sigma}^2_{\text{treat}} > \hat{\sigma}^2_{\text{error}}$.

die sich durch den Unterricht erklären lässt, zur Gesamtabweichung. Um eine Aussage über die Gleichheit oder Ungleichheit der Gruppen zu bekommen, muss durch einen Signifikanztest geprüft werden, ob die Varianzaufklärung im oben geschilderten Rahmen zufällig ist oder nicht. Entsprechend der obigen Darstellung wird für den Fall der Nullhypothese die Wahrscheinlichkeit für das Zustandekommen des Messergebnisses bestimmt. Ein Test prüft dies basierend auf einer F-Verteilung (Bortz, 1999, S. 82). Dies ist eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, die sich aus zufällig normalverteilten Punktwerten ergeben würde.

A.3 Kontraste

Für den Vortest ist die Varianzanalyse das geeignete Verfahren, um die Gleichheit der vier Gruppen zu prüfen. Für den Nachtest sind detaillierte Aussagen zu den Unterschieden der Messwerte von Interesse. Das Verfahren der „geplanten Kontraste“ erscheint zuerst umständlich, die Vorteile gegeben sich erst aus einer statistischen Betrachtung, die hier kurz beschrieben seien. Die Quellen sind, wie bereits genannt, Field (2005) und Bortz (1999). Um die verschiedenen Leistungsmittelwerte zu vergleichen, könnten sie paarweise verglichen und auf Signifikanz getestet werden. Wie auch bei der Begründung für die Varianzanalyse ist es jedoch zwingend, dass das Signifikanzkriterium für jede zu prüfende Hypothese und nicht nur für jeden Paarvergleich erfüllt ist, es also nicht zu einer Aufweichung des Kriteriums kommt (α-Fehler-Kumulation). Ein mehrfacher Paarvergleich ist nur unter Verschärfung der Signifikanzniveaus möglich (Bonferroni-Korrektur). Folglich ist das Signifkanzniveau für jeden Vergleich auf $\alpha = 5\,\%/n_{\mathrm{Vgl}}$ zu reduzieren (n_{Vgl}: Anzahl der Paarvergleiche). So wären zum Beispiel beim Vergleich der Baselinegruppe mit den drei Treatment-Gruppen drei Paarvergleich durchzuführen, entsprechend wäre das Niveau auf 0,17 % zu senken. Die Nutzung eines solchen Verfahrens mit paarweisem Vergleich der Mittelwerte ist für eine explorative Analyse von Daten sinnvoll, wenn noch keine Hypothesen exisiteren und dementsprechend zu ermitteln ist, welcher der vielen Vergleiche bedeutungsvoll sein könnte. Die α-Fehler-Kumulation wird dann in Kauf genommen.

Existiert hingegen eine begründete Hypothese, besteht zur Vermeidung der α-Fehler-Kumulation mathematisch die Möglichkeit, Gruppenvergleiche derart zu rechnen, dass die zu bestimmenden Wahrscheinlichkeiten unabhängig voneinander sind. Außerdem ist es mit Blick auf die Abschätzung der Gesamtpopulationsvarianz wünschenswert, alle angestellten Berechnungen mit maximaler Varianz durchzuführen. Bei einem paarweisen Vergleich sind jedoch immer nur zwei Gruppen involviert, während zum Beispiel beim

Vergleich von Baselinegruppe und Treatmentgruppen alle Versuchspersonen eingebunden seien sollten. Die oben beschriebene Varianzanalyse trennt die Varianz in einen Treament bezogenen Teil und einen Fehleranteil. Das Kontrastverfahren setzt diese Idee weiter fort und trennt die Varianzen weiter nach Gruppenzugehörigkeiten auf.

Die Berechnung orthogonaler Vergleiche sei im Folgenden derart vorgestellt, dass die im Rahmen der Studie durchgeführten Berechnungen plausibel und die Ergebnisse verstehbar werden (Details siehe Kap. 8 in Field und Kap. 7 und 14 in Bortz). Die Grundlage der Berechnung der Kontraste ist die mathematische Beschreibung der von den Versuchspersonen erbrachten Leistungen durch eine multiple, lineare Regression. Die Leistung einer Versuchsperson m lässt sich beschreiben durch:

$$y_m = b_0 + b_1 x_{1,m} + b_2 x_{2,m} + b_3 x_{3,m} + \epsilon_m \tag{A.1}$$

(y: Outcome, hier Leistung; b: Regressionskoeffiziente; x: Prädiktorvariable, Indikatorvariable; ϵ: Fehlerterm, Residuum einer Versuchsperson m)
Die Prädiktorvariablen sind im vorliegenden Fall die Gruppenzugehörigkeiten. Ist die Versuchsperson Mitglied der Baselinegruppe lässt sich dies durch $x_{1,m} = x_{2,m} = x_{3,m} = 0$ kodiert, ist sie Mitglied der Gruppe 1, wird dies durch $x_{1,m} = 1; x_{2,m} = x_{3,m} = 0$ usw. dargestellt (sog. Dummykodierung). Die Regressionskoeffizienten ergeben sind entsprechend: $b_0 = \bar{A}_{\mathrm{BL}}$, $B_i = \bar{A}_i - \bar{A}_{\mathrm{BL}}$. Die Koeffizienten der linearen Regression sind folglich Vergleiche der Leistung der einzelnen Gruppen T1 bis T3 mit der Leistung der Baselinegruppe. Sie stehen auf diese Weise für den durch den Unterricht bewirkten Leistungszuwachs.

Durch eine andere Wahl der Variablen x lässt sich die Regression so gestalten, dass die Regressionskoeffizienten Vergleiche beschreiben, die im Sinne der Hypothesen von Interesse sind. Die Wahl ist so zu treffen, dass (wie auch zuvor) die Vergleiche orthogonal zueinander sind und somit die Regressionskoeffizienten und Wahrscheinlichkeiten unabhängig voneinander sind. Die Signifikanztests können so unabhängig voneinander vorgenommen werden.

Im Folgenden wird die Kontrastkodierung für die Auswertung der Skala Weitere exemplarisch vorgeführt (Details zur Gestaltung der Kontraste siehe Kap. 6.3.1). Die Leistungen der Versuchspersonen bezüglich der Skala Weitere werden wieder durch eine lineare Regression beschrieben. Die Variablen sind diesmal entsprechend Tabelle A.1 gewählt.

	$x'_{m,1}$	$x'_{m,2}$	$x'_{m,3}$
$y_{m,\mathrm{BL}}$	-3	0	0
$y_{m,\mathrm{T0}}$	1	-2	0
$y_{m,\mathrm{T1}}$	1	1	-1
$y_{m,\mathrm{T2}}$	1	1	1

Tab. A.1: Kodierung der Kontraste für die Skala Weitere (Die Gewichte, das heißt die Werte von $x'_{m,1}$ und $x'_{m,2}$ sind orthogonal, weil sich ihre Produktsumme (Skalarprodukt der Vektoren $x_{m,i}$) zu Null ergibt. Unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass sich die Spalten der Tabelle zu Null addieren, lässt sich beweisen, dass die Gewichte $x_{m,i}$ zum Gesamtmittelwert $\bar{G}$ orthogonal sind, siehe Bortz S. 255. Mit drei orthogonalen Gewichten $x_{m,i}$ ergibt sich im Fall von vier Gruppen ein vollständiger Satz orthogonaler Vergleiche.)

Die Koeffizienten berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned} b_0 &= \bar{G} \\ b_1 &= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{3}\left(\bar{A}_{\mathrm{T0}} + \bar{A}_{\mathrm{T1}} + \bar{A}_{\mathrm{T2}}\right) - \bar{A}_{\mathrm{BL}}\right) \\ b_2 &= \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\left(\bar{A}_{\mathrm{T1}} + \bar{A}_{\mathrm{T2}}\right) - \bar{A}_{\mathrm{T0}}\right) \\ b_3 &= \tfrac{1}{2}\left(\bar{A}_{\mathrm{T2}} - \bar{A}_{\mathrm{T2}}\right) \end{aligned} \tag{A.2}$$

Durch die Koeffizienten werden die Vergleiche für die Skala Weitere, gewichtet mit dem Kehrwert der Anzahl der am Vergleich beteiligten Gruppen, beschrieben. Mit einem T-Test lassen sich die Koeffizienten der Regression einzeln auf Signifikanz getestet. Ein T-Test prüft die Signifikanz jedes einzelnen Koeffizienten zu Null auf Grundlage einer T-Verteilung. Diese Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ergibt sich für die Koeffizienten im zufällig, normalverteilten Fall (Bortz, 1999, S. 81).

Der Koeffizient b_1 steht für den Vergeich der Treatmentgruppen gegenüber der Baselinegruppe. Der durch Koeffizient b_2 dargestellte Vergleich beleuchtet die Treamentgruppen genauer. Der Unterschied zwischen der Gruppe T0 und den beiden Gruppen T1 und T2 lässt sich so auf Signifikanz testen. Abschließend wird mit dem Koeffizient b_3 zwischen der Gruppe mit einer bekannten Anwendung und der Gruppe mit zwei bekannten Anwendungen differenziert.

A.4 Normalverteilung

Die beschriebenen statistischen Verfahren sind sogenannte parametrische Verfahren und setzen entsprechend intervallskalierte Skalen voraus. Nur so sind die sogenannten Parameter, wie Mittelwert und Varianz definierbar. Aus der Perspektive der Mathematik bedeutet dies, dass für die Punktwerte eine Norm existiert. Nichtparametrische Verfahren nutzen nur durch die Messung erhaltene Punktwerte, wie zum Beispiel den Modalwert und Median und setzen nur eine ordinale Skala, also eine hierarchische Ordnung der Werte, voraus. Um zu prüfen, ob eine Skala intervallskaliert ist, ist die Punktwerteverteilung zu betrachten. Die Grundlage der Prüfung bildet die Annahmen, dass die Punktwerte getesteter Personen stets um einen zentralen Punktwert zufällig streuen. Das heißt, dass eine geeignet konstruierte Skala eine Normalverteilung von Punktwerten wiedergeben sollte. Ein positiver Test auf Normalverteilung schafft entsprechend die mathematische Voraussetzung für parametrische Rechenverfahren.

Bei Items, die bestimmte Merkmalsausprägungen in mehreren Stufen erfragen, ist der Normalverteilungstest für jedes einzelne Item durchführbar. Im Falle von Wissenstests sind die Items jedoch dichotom und erst die Summenpunktwerte einer Skalen lassen sich auf Normalverteilung prüfen. Ein Standardverfahren ist der Kolmogorov-Smirnov-Test, der die Korrelation der gemessenen Punktwerte mit ihrer normalen Ausgleichsfunktion prüft. Ist der Unterschied nicht signifikant, $p > 5$ %, sind parametrische Verfahren zulässig (Field 2005, Kap. 3.5). Es ist zu beachten, dass die Analyseverfahren nicht per se verboten sind, wenn die Normalverteilung nicht gegeben ist. Denn bei spezieller Wahl der Stichprobe kann trotz einer intervallskalierten Skala eine nichtnormale Punktwerteverteilung entstehen. Parametrische Verfahren sind durchaus robust gegenüber geringer Verletzung der Voraussetzung (siehe Bortz 1999, S. 128).

Anhang B

Unterricht

Unterrichtsablauf

	Treatment T0	Treatment T1	Treatment T2
1. Stunde			
5 min	Begrüßung	Begrüßung	Begrüßung
10 min	**Der Pfeil**	**Der Geschwindigkeitspfeil**	**Der Geschwindig.- & der Kraftpfeil**
	Diskussion	*Diskussion*	*Diskussion*
	Form, Farbe, Länge	Form, Farbe, Länge	Form, Farbe, Länge
20 min	**Rechnen mit Pfeilen**	**Bewegung darstellen**	**Beweg. & Kraft darstellen**
	Diskussion & Vortrag	*Vorführexperiment & Vortrag*	*Vorführexperiment & Vortrag*
	Betrag & Addition	Betrag & Richtung	Betrag & Richtung
10 min	**Zusammenfassung**	**Zusammenfassung**	**Zusammenfassung**
	Vortrag & Merkblatt	*Vortrag & Merkblatt*	*Vortrag & Merkblatt*
	Pfeile & Addition	Pfeile & Addition	Pfeile & Addition
2. Stunde			
5 min	Wiederholung	Wiederholung	Wiederholung
20 min	**Pfeile & Addition**	**Richtung & Betrag**	**Richtung & Betrag**
	Einzelarbeit & Besprechung	*Einzelarbeit & Besprechung*	*Einzelarbeit & Besprechung*
	Übungsaufgaben	Übungsaufgaben	Übungsaufgaben
10 min	**Verschiebung**	**Richtung & Betrag**	**Richtung & Betrag**
	Vortrag & Merkblatt	*Einzelarbeit & Besprechung*	*Einzelarbeit & Besprechung*
		Übungsaufgaben	Übungsaufgaben
10 min	**Addition**		
	Einzelarbeit & Besprechung	s. o.	s. o.
	Übungsaufgaben		

Tab. B.1: Ablauf der ersten beiden Unterrichtsstunden der drei Treatmentgruppen

Unterrichtsablauf (Fortsetzung)

	Treatment T0	Treatment T1	Treatment T2
3. Stunde			
20 min	**Regeln der Addition**	**Addition**	**Addition**
	Diskussion	*Vorführexperiment*	*Vorführexperiment*
	Kumutativität etc.	Geschwindigkeit	Geschwindigkeit
10 min	**Zusammenfassung**		
	Vortrag & Merkblatt	s. o.	s. o.
10 min	**Addition**		
	Einzelarbeit & Besprechung	s. o.	*Vorführexperiment*
	Übungsaufgaben		Kraft
5 min		**Zusammenfassung**	**Zusammenfassung**
s. o.	*Vortrag & Merkblatt*	*Vortrag & Merkblatt*	
	Hausaufgaben	*Hausaufgaben*	*Hausaufgaben*
4. Stunde			
10 min	**Wiederholung**	**Wiederholung**	**Wiederholung**
	Vortrag	*Vortrag*	*Vortrag*
10 min	**Hausaufgaben**	**Hausaufgaben**	**Hausaufgaben**
	Besprechung	*Besprechung*	*Besprechung*
10 min	**Subtraktion**	**Übung**	**Übung**
	Diskussion	*Einzelarbeit & Besprechung*	*Einzelarbeit & Besprechung*
		Addition, Geschwindigkeit	Addition, Geschwindig. & Kraft
10 min	**Übung**	**Übung**	**Übung**
	Einzelarbeit & Besprechung	*Einzelarbeit & Besprechung*	*Einzelarbeit & Besprechung*
	Subtraktion	Addition Geschwindigkeit	Addition Geschwindig. & Kraft
5 min	Abschied	Abschied	Abschied

Tab. B.2: Ablauf der letzten beiden Unterrichtsstunden der drei Treatmentgruppen

Anhang C

Tests

C.1 Vortest

Vortest Subskala „Pfeile und Physik“

Item	Anwendung	Bereich: Betrag & Richtung	Bereich: Addition	Bereich: Subtraktion	Quelle
1	a	x			in Anlehnung an Nguyen und Meltzer (2003)
2	a	x			in Anlehnung an Nguyen und Meltzer (2003)
3	g	x			
4	g	x			
5	k	x			
6	k		x		
7	o	x			
8	v		x		
9	a		x		in Anlehnung an Nguyen und Meltzer (2003)
10	a			x	
11	a		x		in Anlehnung an Nguyen und Meltzer (2003)
12	a	x			
13	v	x			
14	o. P.				
15	o. P.				in Anlehnung an Jung et al. (1977)
16	o. P.				TIMSS-Item O13, Baumert et al. (1998, S. 97)
17	k		x		TIMSS-Item L1, Baumert et al. (1998, S. 103)
18	o. P.				TIMSS-Item I12, Baumert et al. (1998, S. 55)

Tab. C.1: Zuordnung der Items des Vortests zu Pfeilanwendungen, Inhaltsbereichen und Quellen, Abkürzungen: a: abstrakt, g: Geschwindigkeit, k: Kraft, o: Ort, v: Verschiebung, o. P.: ohne Pfeile

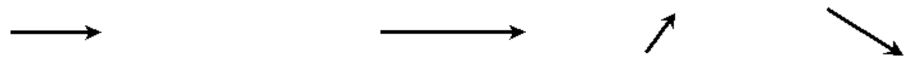
Fragebogen

VT 2.0 - 1.8.2007

Beispiel:
Wohin zeigt der Pfeil?

Kreuze an: links O — rechts ☒ — oben O — unten O

1
Welcher Pfeil hat die gleiche Länge wie der unten gezeigte? 1 a01



Kreuze an: O O O O

2
Welcher Pfeil hat die gleiche Richtung wie der unten gezeigte? 2 a04

Kreuze an: O O O O

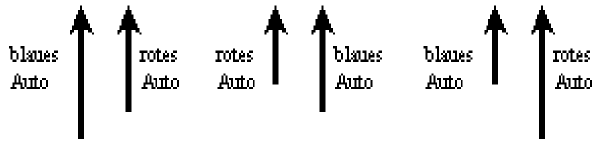
3
Ein Forscher macht eine Untersuchung an einem Fluss. Für welche Größe ist es sinnvoll, sie als Pfeil darzustellen? 3 g05

Kreuze an: Wasserströmung O — Wassertemperatur O — Tiefe des Flusses O — Breite des Flusses O

Abb. C.1: Fragebogen zur Subskala „Pfeile und Physik“

4
Ein rotes Auto überholt ein blaues Auto. Die Geschwindigkeiten der Autos sind rechts durch Pfeile darstellt. Welche Abbildung beschreibt die Situation richtig?

4 g06



Keine der Abbildungen ist korrekt.

Kreuze an: O O O O

5
Moritz zieht mit einer Kraft von 200 Newton an einem Seil. Die Kraft ist als Pfeil dargestellt. Der Maßstab ist unten gezeigt. Welcher Pfeil ist der richtige?

5 k05

Kreuze an: O O O O

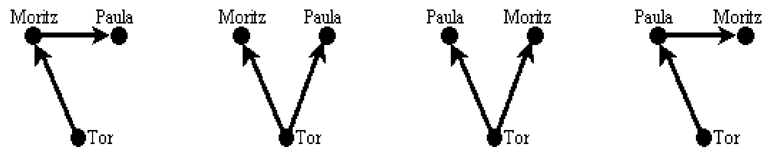
6
Vier Jungen veranstalten ein Tauziehen, zwei gegen zwei. Das Seil bewegt sich nicht. Die Kräfte, mit der die Jungen zu beiden Seiten ziehen, sind als Pfeile dargestellt. Welche Abbildung beschreibt die Situation am besten?

6 k08

Kreuze an: O O O O

7
Moritz steht auf dem Schulhof. Paula steht vom Eingangstor aus gesehen rechts von ihm. Die Orte der beiden werden durch Pfeile dargestellt, die sich auf eine Beobachtung vom Tor beziehen. Welche Zeichnung ist richtig?

7 o02

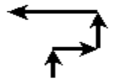


Kreuze an: O O O O

Abb. C.2: Fragebogen zur Subskala „Pfeile und Physik“

8 8 v02

Moritz verschiebt ein Kiste. Die Verschiebungen sind mit Pfeilen dargestellt (siehe unten). Wäre die Endposition anders, wenn man die Reihenfolge der Pfeile ändert.



	Ja, die Reihenfolge ist wichtig.	Nein, die Reihenfolge ist egal.	Ja, aber Verschiebungs-pfeile sind eine Ausnahme.	Nein, aber Verschiebungs-pfeile sind eine Ausnahme.
Kreuze an:	O	O	O	O

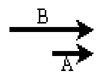
9 9 a03

In welcher Abbildung ist der Ergebnispfeil am längsten, wenn man die Pfeile addiert?

Kreuze an:	O	O	O	O

10 10 a07

Wie Zahlen kann man auch Pfeile subtrahieren. Subtrahiere Pfeil A von Pfeil B. Welcher Pfeil ist der Ergebnispfeil?



Kreuze an:	O	O	O	O

Abb. C.3: Fragebogen zur Subskala „Pfeile und Physik“

11 11 a10

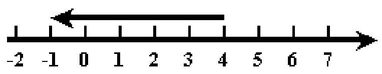
In welcher Abbildung ist der Ergebnispfeil am längsten, wenn man die Pfeile addiert?

Kreuze an: O O O O

---

12 12

Welche Aussage ist richtig?



Der Pfeil hat eine Länge von 5.	Der Pfeil hat eine Länge von 4.	Der Pfeil hat eine Länge von 1.	Der Pfeil hat eine Länge von -1.
O	O	O	O

Kreuze an:

---

13 13

Paula und Moritz stehen nebeneinander auf einem Platz. Beide gehen 10 Meter. Wie weit sind Sie dann voneinander entfernt?

10 Meter	20 Meter	0 Meter	Man kann nicht sagen wie weit.
O	O	O	O

Kreuze an:

---

14 14

Zwei Züge fahren mit der gleichen, hohen Geschwindigkeit neben einander in die gleiche Richtung. Ein Mann guckt von einem Zug in den anderen. Welche Aussage ist richtig?

Der Mann kann die Passagiere im anderen Zug nicht beobachten, weil die Züge so schnell fahren.	Der Mann kann die Passagiere des anderen Zuges beobachten, weil der benachbarte Zug stillzustehen scheint.	Der Mann kann die Passagiere des anderen Zuges nicht beobachten, weil sie in die gleiche Richtung fahren.	Man kann nicht sagen, ob der Mann die Passiere beobachten kann oder nicht.
O	O	O	O

Kreuze an:

Abb. C.4: Fragebogen zur Subskala „Pfeile und Physik“

15

Ein Sportwagen und ein Lastwagen fahren gleichzeitig in einen Tunnel. Der Lastwagen kommt zuerst wieder heraus. Welche Aussage ist richtig?

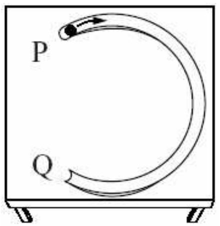
	Der Lastwagen ist im Mittel schneller gefahren als der Sportwagen.	Der Sportwagen ist im Mittel schneller gefahren als der Lastwagen.	Beide Wagen sind im Mittel gleich schnell im Tunnel gefahren.	Man kann nicht sagen, welcher Wagen im Mittel schneller gefahren ist.
Kreuze an:	O	O	O	O

15

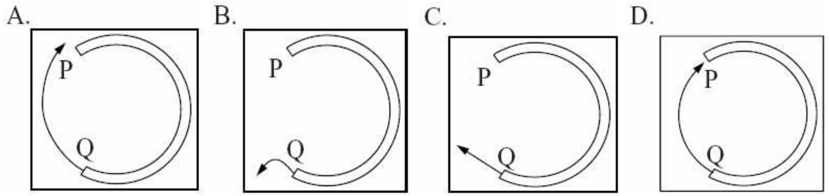
16

Auf einem ebenen Tisch wird eine gebogene Rinne befestigt (siehe Bild). Eine Kugel wird beim Punkt P in die Rinne gestoßen, so dass sie bei Q wieder herauskommt.

16



Die folgenden Bilder zeigen jeweils den ebenen Tisch und die Rinne von oben. In welchem Bild wird dargestellt, wie die Kugel weiterrollen wird, wenn sie aus der Rinne beim Punkt Q herausrollt?



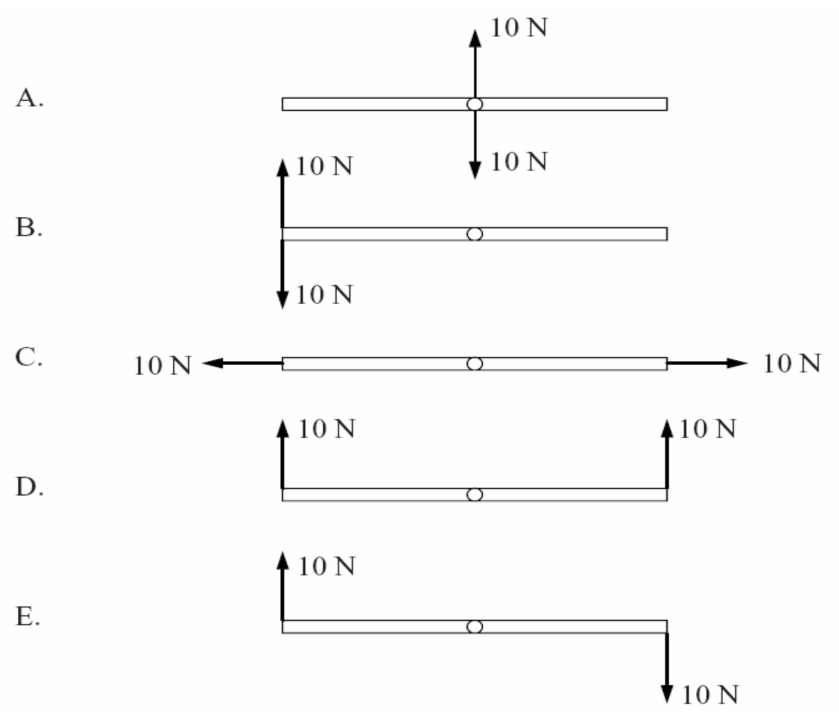
	A.	B.	C.	D.
Kreuze an:	O	O	O	O

Abb. C.5: Fragebogen zur Subskala „Pfeile und Physik“

17

Ein gleichmäßig geformter Stab wird in seiner Mitte drehbar aufgehängt. Auf ihn wirken zwei Kräfte in derselben Ebene. Beide Kräfte sind gleich groß, sie betragen 10 N (Newton). In welchem Fall entsteht ein Dreheffekt?

17



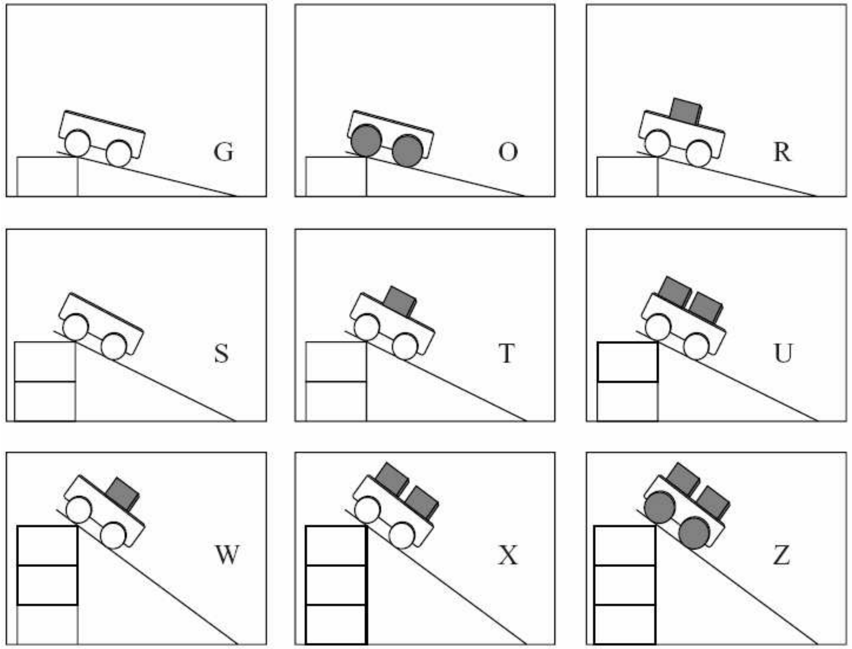
	A	B	C	D
Kreuze an:	O	O	O	O
	E			
	O			

Abb. C.6: Fragebogen zur Subskala „Pfeile und Physik“

18

Die Zeichnungen zeigen mehrere Versuche, die Andrea mit Wagen mit unterschiedlich großen Rädern durchgeführt hat. Sie hat sie von unterschiedlichen Höhen hinabrollen lassen. Die Blöcke, die sie hineingelegt hat, hatten alle die gleiche Masse.
Sie möchte folgende Vermutung überprüfen: Je schwerer ein Wagen ist, desto größer ist seine Geschwindigkeit am Fuße der Rampe. Welche drei Versuche sollte sie vergleichen?

18



Kreuze an:

G, T, und X	**O, T, und Z**	**R, U, und Z**	**S, T, und U**
O	O	O	O

S, W, und X
O

Abb. C.7: Fragebogen zur Subskala „Pfeile und Physik“

C.2 Nachtest

Skala Abstrakt

Item	**Bereich**		
	Betrag & Richtung	Addition	Subtraktion
1	x		
4		x	
12	x		
17		x	
20		x	
21			x
23		x	
37		x	
39		x	
42		x	
45		x	
47			x

Tab. C.2: Einordnung der Items der Skala Abstrakt in Inhaltsbereiche; alle Items in Anlehnung an Nguyen und Meltzer (2003)

Skala Geschwindigkeit			
Item	**Bereich**		
	Betrag & Richtung	Addition	Subtraktion
8	x		
10		x	
14	x		
16	x		
18		x	
28		x	
31			x
33		x	
40			x
41			x
44		x	
49			x
50		x	
53			x
56		x	
34	x		

Tab. C.3: Einordnung der Items der Skala Geschwindigkeit in Inhaltsbereiche

Skala Kraft			
Item	**Bereich**		
	Betrag & Richtung	Addition	Subtraktion
3		x	
11		x	
15	x		
19			x
22		x	
24		x	
25	x		
26	x		
30		x	
32		x	
35		x	
36		x	
43		x	
46		x	
51		x	
54			x

Tab. C.4: Einordnung der Items der Skala Kraft in Inhaltsbereiche

Skala Weitere

Item	Anwendung	Bereich: Betrag & Richtung	Bereich: Addition	Bereich: Subtraktion
2	b	x		
5	v	x		
6	k. P.			
7	o	x		
9	v		x	
13	v		x	
27	o	x		
29	v		x	
38	v		x	
48	s	x		
52	o	x		
55	o			x

Tab. C.5: Einordnung der Items der Skala Weitere in Anwendungs- und Inhaltsbereiche, Abkürzungen: b: Beschleunigung, o: Ort, s: Stoß, v: Verschiebung, k. P.: keine Pfeildarstellung zulässig

Fragebogen zur Vektorrechnung

NT 2.0 1.8.2007

Beispiel:

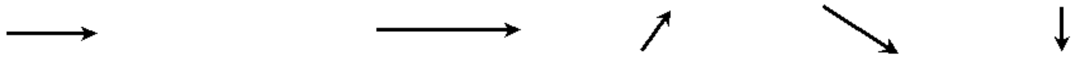
Wohin zeigt der Pfeil?

	links	rechts	oben	unten
Kreuze an:	O	X	O	O

1 a01

1

Welcher Pfeil hat die gleiche Länge wie der unten gezeigte?



Kreuze an:	O	O	O	O

2 b01

2

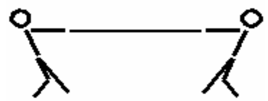
Welche der folgenden Größen lässt sich sinnvoll als Pfeil (mit Betrag und Richtung) darstellen?

	Temperatur	Dichte	Beschleunigung	Volumen
Kreuze an:	O	O	O	O

3 k109

3

Zwei Jungen veranstalten ein Tauziehen. Beide ziehen gleich starkt. Die Kräfte, mit denen sie am Seil ziehen, lassen sich als Pfeile darstellen und addieren. Welche Aussage ist richtig?

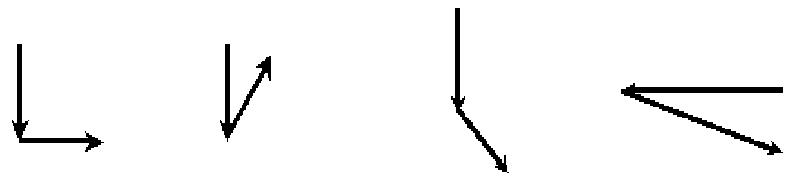


	Der Ergebnispfeil zeigt in die Richtung des stärkeren Jungen.	Der Ergebnispfeil ist Null und hat deswegen keine Bedeutung.	Der Ergebnispfeil hat im Zusammenhang mit dem Tauziehen keine Bedeutung.	Der Ergebnispfeil stellt die Gesamtkraft auf das Seil dar.
Kreuze an:	O	O	O	O

Abb. C.8: Nachtest-Fragebogen

4
In welcher Abbildung ist der Ergebnispfeil am längsten, wenn man die Pfeile addiert?

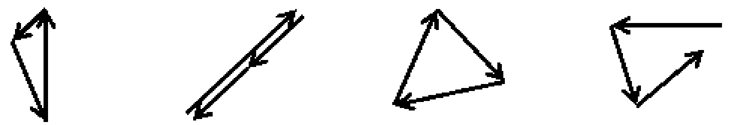
4 a03



Kreuze an: O O O O

5
Drei Jungen spielen sich einen Fußball zu. Für jeden Spieler ist die Entfernung und die Richtung des Schusses durch einen Pfeil dargestellt. In welcher der Abbildungen haben es die Spieler <u>NICHT</u> geschafft den Ball einmal Reihum zu spielen?

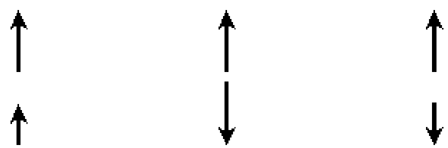
5 v102



Kreuze an: O O O O

6
Der Temperaturverlauf ist über das Jahr gesehen auf der Nord- und der Südhalbkugel genau entgegengesetzt. Im Sommer sind die Temperaturen auf der Nordhalbkugel hoch, auf der Südhalbkugel niedrig. Welche Abbildung ist sinnvoll?

6 s01



Man kann Temperaturen nicht sinnvoll mit Pfeilen beschreiben.

Kreuze an: O O O O

7
Moritz läuft über den Schulhof. Er läuft 10 Meter geradeaus, dreht sich nach rechts und läuft 20 Meter. Paula läuft zu ihm, jedoch geht sie den direkten Weg. Welche Zeichnung stimmt?

7 o01

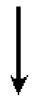
Kreuze an: O O O O

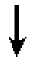
Abb. C.9: Nachtest-Fragebogen

8

Moritz fährt mit einem Schiff auf dem Ozean. Ein Pfeil beschreibt die Geschwindigkeit des Schiffes im Wasser (siehe unten). Welcher Pfeil beschreibt die Geschwindigkeit des Wassers vom Boot ausgesehen?

8 g02

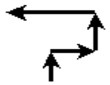


			Man kann das nicht mit Pfeilen beschreiben.	
Kreuze an:	O	O	O	O

9

Moritz schiebt einen Sessel mehrmals hin und her. Die Verschiebungen sind mit Pfeilen dargestellt. Welcher Pfeil stellt die Verschiebung dar, mit der Moritz den Sessel mit einem Mal hätte verschieben können?

9 v01



				
Kreuze an:	O	O	O	O

10

Ein Zug fährt langsam durch einen Bahnhof. Im Zug läuft eine Frau. Von draußen gesehen, bleibt die Frau <u>auf der STELLE.</u> Man kann die Geschwindigkeit des Zuges und die Geschwindigkeit der Frau als Pfeile darstellen. Welche Aussage ist richtig?

10 g03

	Der Geschwindigkeits-pfeil der Frau ist länger als der Geschwindigkeits-pfeil des Zuges.	Der Geschwindigkeits-pfeil des Zuges ist länger als der Geschwindigkeits-pfeil der Frau.	Die Pfeile können unterschiedlich lang sein, müssen aber nicht.	Die Pfeile haben die gleiche Länge.
Kreuze an:	O	O	O	O

Abb. C.10: Nachtest-Fragebogen

11
Die Leinen von drei Hunden haben sich verknotet. Die Hunde ziehen in verschiedene Richtungen, aber keiner der Hunde kommt vom Fleck. Die Kräfte lassen sich durch Pfeile darstellen und lassen sich addieren. Welche Aussage ist richtig?

11 k108

	Der Ergebnispfeil zeigt in die Richtung, in die der stärkste Hund zieht.	Der Ergebnispfeil ist Null.	Man kann nicht sagen in welche Richtung der Ergebnispfeil zeigt.	Der Ergebnispfeil zeigt in die Richtung in die die meisten Hunde ziehen.
Kreuze an:	O	O	O	O

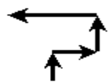
12
Welcher Pfeil hat die gleiche Richtung wie der unten gezeigte?

12 a04

				
Kreuze an:	O	O	O	O

13
Moritz verschiebt ein Kiste. Die Verschiebung ist mit Pfeilen dargestellt (siehe unten). Die Pfeile lassen sich addieren. Wäre der Ergebnispfeil anders, wenn man die Reihenfolge der Pfeile ändert.

13 v02



	Ja, die Reihenfolge ist wichtig.	Nein, die Reihenfolge ist egal.	Ja, aber Verschiebungs-pfeile sind eine Ausnahme.	Nein, aber Verschiebungs-pfeile sind eine Ausnahme.
Kreuze an:	O	O	O	O

14
Ein Forscher macht eine Untersuchung an einem Fluss. Für welche Größe ist es sinnvoll, sie als Pfeil darzustellen?

14 g05

	Wasserströmung	Wassertemperatur	Tiefe des Flusses	Breite des Flusses
Kreuze an:	O	O	O	O

Abb. C.11: Nachtest-Fragebogen

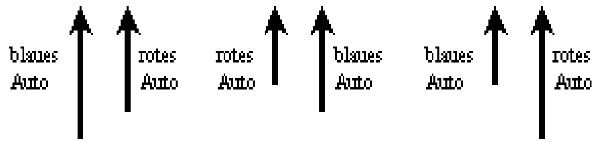
15
Martin und Moritz veranstalten ein Tauziehen. Die Kräfte, mit denen beide ziehen, lassen sich als Pfeile darstellen. Martin schafft es Moritz zu sich zu ziehen. Welche Aussage ist richtig?

15 k106

	Die Pfeile sind unterschiedlich lang und zeigen in die gleiche Richtung.	Die Pfeile sind unterschiedlich lang und zeigen in die entgegengesetzte Richtung.	Die Pfeile sind gleich lang. Über die Richtung kann man nichts sagen.	Die Pfeile haben die gleich Richtung, über die Pfeillänge kann man nichts sagen.
Kreuze an:	O	O	O	O

16
Ein rotes Auto überholt ein blaues Auto. Die Geschwindigkeiten der Autos sind rechts durch Pfeile darstellt. Welche Abbildung beschreibt die Situation richtig?

16 g06

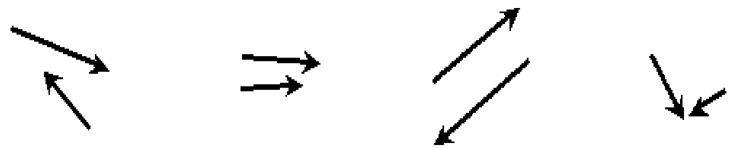


Keine der Abbildungen ist korrekt.

Kreuze an: O O O O

17
In welcher Abbildung ist der Ergebnispfeil am längsten, wenn man die Pfeile addiert?

17 a05



Kreuze an: O O O O

Abb. C.12: Nachtest-Fragebogen

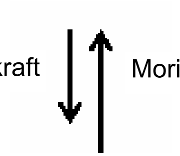
18
Ein Mann rudert in einem Boot auf einem Fluss mit Strömung. Eine Frau beobachtet den Mann vom einem Steg aus. Für sie sieht es aus, als würde der Mann nicht von der Stelle kommen. Die Geschwindigkeit des Flusses und die Geschwindigkeit des Bootes im Wasser lassen sich als Pfeile darstellen. Die Pfeile lassen sich addieren. Welche Aussage ist richtig?

18 g07

	Der Ergebnispfeil ist Null.	Der Ergebnispfeil zeigt in die gleiche Richtung wie der Geschwindigkeitspfeil des Flusses.	Der Ergebnispfeil zeigt in die entgegengesetzte Richtung wie der Geschwindigkeitspfeil des Flusses.	Der Ergebnispfeil ist nicht Null, über die Richtung kann man nichts sagen.
Kreuze an:	O	O	O	O

19
Moritz wirft einen Ball direkt nach oben. Die Kraft mit der Moritz beim werfen gegen den Ball drückt, lässt sich als Pfeil darstellen. Die Gewichtskraft des Ball lässt sich auch als Pfeil darstellen (siehe unten). Die Pfeile lassen sich addieren. Welche Bedeutung hat der Ergebnispfeil.

19 k105



	Der Ergebnispfeil ist die Kraft, mit der Moritz wirft.	Der Ergebnispfeil ist die Kraft, die den Ball zum Boden zieht.	Der Ergebnispfeil ist die Mischung aus den beiden Kräften.	Der Ergebnispfeil ist die Kraft, die den Ball schneller werden lässt.
Kreuze an:	O	O	O	O

20
In welcher Abbildung ist der Ergebnispfeil am <u>KÜRZESTEN,</u> wenn man die Pfeile addiert?

20 a06

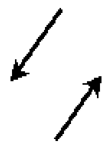
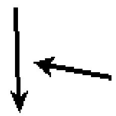
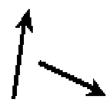
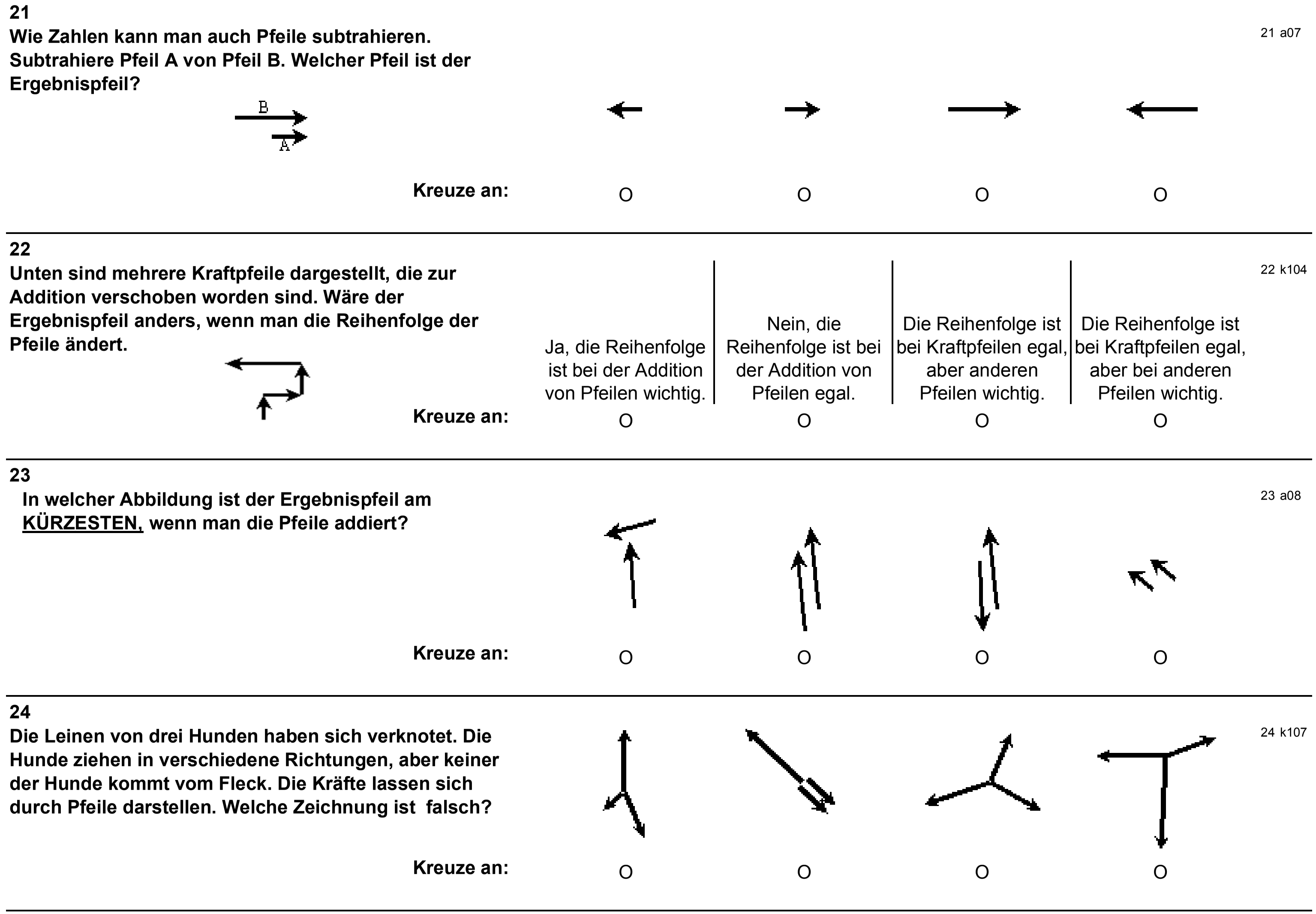
				
Kreuze an:	O	O	O	O

Abb. C.13: Nachtest-Fragebogen



21
Wie Zahlen kann man auch Pfeile subtrahieren. Subtrahiere Pfeil A von Pfeil B. Welcher Pfeil ist der Ergebnispfeil?

Kreuze an: O O O O

21 a07

22
Unten sind mehrere Kraftpfeile dargestellt, die zur Addition verschoben worden sind. Wäre der Ergebnispfeil anders, wenn man die Reihenfolge der Pfeile ändert.

Ja, die Reihenfolge ist bei der Addition von Pfeilen wichtig.	Nein, die Reihenfolge ist bei der Addition von Pfeilen egal.	Die Reihenfolge ist bei Kraftpfeilen egal, aber anderen Pfeilen wichtig.	Die Reihenfolge ist bei Kraftpfeilen egal, aber bei anderen Pfeilen wichtig.
O	O	O	O

Kreuze an:

22 k104

23
In welcher Abbildung ist der Ergebnispfeil am <u>KÜRZESTEN,</u> wenn man die Pfeile addiert?

Kreuze an: O O O O

23 a08

24
Die Leinen von drei Hunden haben sich verknotet. Die Hunde ziehen in verschiedene Richtungen, aber keiner der Hunde kommt vom Fleck. Die Kräfte lassen sich durch Pfeile darstellen. Welche Zeichnung ist falsch?

Kreuze an: O O O O

24 k107

Abb. C.14: Nachtest-Fragebogen

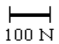
25
Welche der folgenden Tätigkeiten lässt sich sinnvoll durch einen Pfeil (mit Betrag und Richtung) darstellen?

25 k04

	singen	ziehen	gucken	trinken
Kreuze an:	O	O	O	O

26
Moritz zieht mit einer Kraft von 200 Newton an einem Seil. Die Kraft ist als Pfeil dargestellt. Der Maßstab ist unten gezeigt. Welcher Pfeil ist der richtige?

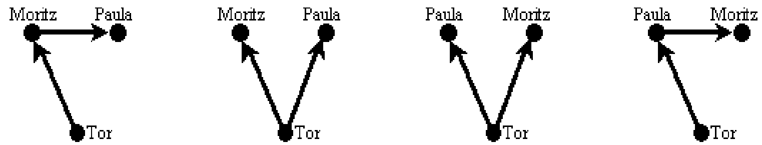
26 k05



Kreuze an:	O	O	O	O

27
Moritz steht auf dem Schulhof. Paula steht vom Eingangstor aus gesehen rechts von ihm. Die Orte der beiden werden durch Pfeile dargestellt, die sich auf eine Beobachtung vom Tor beziehen. Welche Zeichnung ist richtig?

27 o02



Kreuze an:	O	O	O	O

28
Eine Frau läuft in einem fahrenden Zug vom Ende des Zuges zur Spitze des Zuges, also in Fahrtrichtung. Die Geschwindigkeiten sind unten mit zwei Pfeilen dargestellt. Die Pfeile lassen sich addieren. Welche Bedeutung hat der Ergebnispfeil?

28 g09

	Der Ergebnispfeil ist die Geschwindigkeit der Frau über dem Erdboden.	Der Ergebnispfeil ist die Geschwindigkeit der Frau auf dem Fußboden des Zuges.	Der Ergebnispfeil ist eine Mischung aus der Geschwindigkeit der Frau und der Geschwindigkeit des Zuges.	Der Ergebnispfeil ist der Mittelwert der Geschwindigkeit der Frau und der Geschwindigkeit des Zuges.
Kreuze an:	O	O	O	O

Abb. C.15: Nachtest-Fragebogen

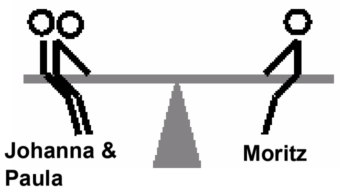
29
Ein Mann macht 100 Schritte. Ist er auch 100 Schritte von seinem Startpunkte entfernt?

29 v03

	ja	nein	meistens	kann, muss aber nicht
Kreuze an:	O	O	O	O

30
Johanna und Paula sitzen auf einer Wippe Moritz gegenüber. Die Wippe ist im Gleichgewicht. Mit seinem Körpergewicht drückt jeder die Wippe nach unten. Die Kräfte lassen sich mit Pfeilen darstellen. Wenn man die Kraftpfeile von Johanna und Paula addiert, welche Bedeutung hat dann der Ergebnispfeil?

30 k103



	Der Ergebnispfeil beschreibt das Gleichgewicht.	Der Ergebnispfeil steht für die Kraft, mit der Johanna und Paula auf die Wippe drücken.	Der Ergebnispfeil ist Null und hat deswegen keine Bedeutung.	Der Ergebnispfeil steht für die Kraft, die auf den Fuß der Wippe wirkt.
Kreuze an:	O	O	O	O

31
Zwei Züge fahren nebeneinander her. Ein Mann guckt von einem Zug in den anderen. Die Passagiere des andern Zuges fahren ganz langsam an ihm vorbei. Die Geschwindigkeiten der Züge lassen sich als Pfeile darstellen. Welche Aussage ist richtig?

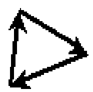
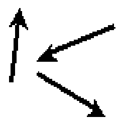
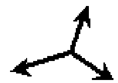
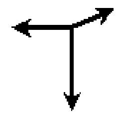
31 g10

	Die Pfeile sind unterschiedlich lang und zeigen in die gleiche Richtung.	Die Pfeile sind unterschiedlich lang und zeigen in die entgegengesetzte Richtung.	Die Pfeile sind gleich lang. Über die Richtung kann man nichts sagen.	Die Pfeile haben die gleich Richtung, über die Pfeillänge kann man nichts sagen.
Kreuze an:	O	O	O	O

Abb. C.16: Nachtest-Fragebogen

32 32 k07

Die Leinen von drei Hunden haben sich verknotet. Die Hunde ziehen in verschiedene Richtungen, aber keiner der Hunde kommt vom Fleck. Die Kräfte lassen sich durch Pfeile darstellen. Welche Zeichnung ist falsch?

				
Kreuze an:	O	O	O	O

33 33 g102

Unten sind mehrere Geschwindigkeitspfeile dargestellt, die zur Addition verschoben worden sind. Wäre der Ergebnispfeil anders, wenn man die Reihenfolge der Pfeile ändert?

	Ja, die Reihenfolge ist bei der Addition von Pfeilen wichtig.	Nein, die Reihenfolge ist bei der Addition von Pfeilen egal.	Die Reihenfolge ist bei Geschwindigkeits-pfeilen egal, aber bei anderen Pfeilen wichtig.	Die Reihenfolge ist bei Geschwindigkeits-pfeile egal, aber bei anderen Pfeilen wichtig.
Kreuze an:	O	O	O	O

34 34 g12

Welche der folgenden Tätigkeiten lässt sich <u>NICHT</u> durch einen Pfeil mit Betrag und Richtung darstellen?

	geradeaus laufen	zu Seite schieben	nach oben steigen	im Kreis laufen
Kreuze an:	O	O	O	O

35 35 k08

Vier Jungen veranstalten ein Tauziehen, zwei gegen zwei. Das Seil bewegt sich nicht. Die Kräfte, mit der die Jungen zu beiden Seiten ziehen, sind als Pfeile dargestellt. Welche Abbildung beschreibt die Situation am besten?

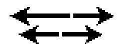
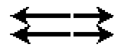
				
Kreuze an:	O	O	O	O

Abb. C.17: Nachtest-Fragebogen

36 36 k09

Moritz zieht eine Kiste über den Boden. Paula zieht eine ANDERE Kiste über den Boden. Die Kräfte lassen sich mit Pfeilen darstellen und addieren. Welche Bedeutung hat der Ergebnispfeil?

	Der Ergebnispfeil stellt Kraftunterschied dar.	Der Ergebnispfeil stellt die Gesamtkraft dar.	Der Ergebnispfeil ist Null und hat deswegen keine Bedeutung.	Der Ergebnispfeil hat im Zusammenhang mit den beiden Kisten keine Bedeutung.
Kreuze an:	O	O	O	O

37 37 a10

In welcher Abbildung ist der Ergebnispfeil am längsten, wenn man die Pfeile addiert?

Kreuze an:	O	O	O	O

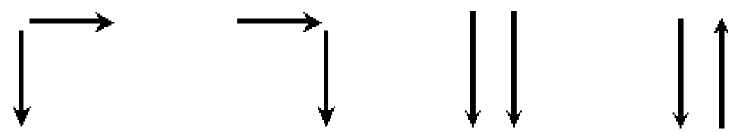
38 38 v101

Johanna verschiebt einen Tisch. Wenig später verschiebt Moritz den Tisch in entgegengesetzter Richtung um die doppelte Strecke. Die Verschiebungen lassen sich mit Pfeilen darstellen und addieren. Welche Aussage ist richtig?

	Der Ergebnispfeil ist Null.	Der Ergebnispfeil zeigt in die gleiche Richtung wie der Verschiebungspfeil von Paula.	Der Ergebnispfeil zeigt in die gleiche Richtung wie der Verschiebungspfeil von Moritz.	Der Ergebnispfeil ist nicht Null, über die Richtung kann man nichts sagen.
Kreuze an:	O	O	O	O

39 39 a11

In welcher Abbildung ist der Ergebnispfeil am längsten, wenn man die Pfeile addiert?

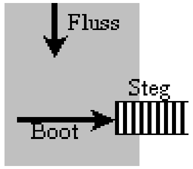


Kreuze an:	O	O	O	O

Abb. C.18: Nachtest-Fragebogen

40
Ein Boot fährt auf einem Fluss. Der Fluss fließt mit einer bestimmten Geschwindigkeit an einem Steg vorbei. Vom Steg aus gesehen, bewegt sich das Boot wie unten gezeigt auf den Steg zu. Beide Geschwindigkeiten sind als Pfeile dargestellt. Welche Ausrichtung hat das Boot?

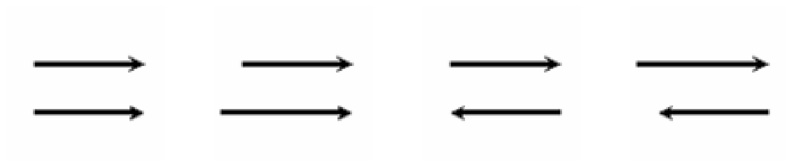
40 g13



Kreuze an: O O O O

41
Zwei Züge fahren nebeneinander. Ein Mann guckt von einem Zug in den anderen. Die Passagiere des anderen Zuges fahren ganz langsam an ihm vorbei. Die Geschwindigkeiten der Züge lassen sich als Pfeile darstellen. Welche Abbildung ist richtig?

41 g11



Kreuze an: O O O O

41
Ein kurzer und ein langer Pfeile werden addiert. Welche Aussage ist richtig?

41 a12

"Der Ergebnispfeil ist immer genauso lang wie die zusammen-genommenen Längen der beiden gegebenen Pfeile."	"Der Ergebnispfeil ist nie länger als der lange Pfeil."	"Der Ergebnispfeil ist immer länger als der kurze und kürzer als der lange Pfeile."	"Der Ergebnispfeil ist kürzer oder gleich der zusammen-genommenen Längen der beiden Pfeile."
O	O	O	O

Kreuze an:

Abb. C.19: Nachtest-Fragebogen

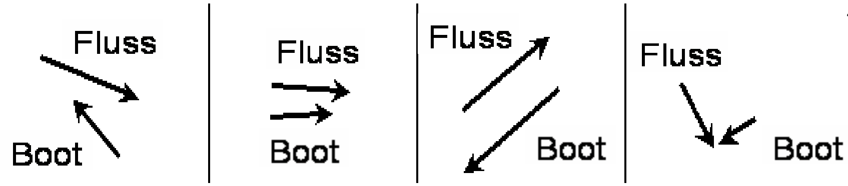
42 42 k102

Auf einem Konzert trägt Moritz Johanna auf den Schultern, damit sie weit sehen kann. Johanna drückt mit ihrem Körpergewicht nach unten auf die Schultern von Moritz, Moritz drückt nach oben. Die Kräfte lassen sich durch Pfeile darstellen. Die Pfeile lassen sich addieren. Welche Aussage ist richtig?

	Der Ergebnispfeil ist Null.	Der Ergebnispfeil zeigt in die gleiche Richtung wie der Kraftpfeil von Moritz.	Der Ergebnispfeil zeigt in die entgegengesetzte Richtung wie der Kraftpfeil von Moritz.	Der Ergebnispfeil ist nicht Null, über die Richtung kann man nichts sagen.
Kreuze an:	O	O	O	O

43 43 g101

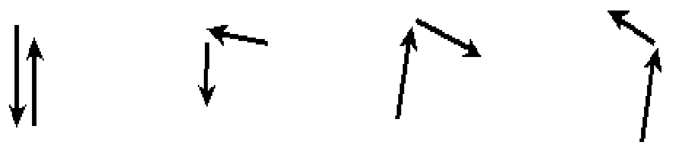
Ein Boot fährt auf einem Fluss. Jede Abbildung zeigt einen Geschwindigkeitspfeil des Flusses und einen des Bootes. In welcher Abbildung ist der Ergebnispfeil am längsten, wenn man die Pfeile addiert?



Kreuze an: O O O O

44 44 a13

In welcher Abbildung ist der Ergebnispfeil am <u>KÜRZESTEN</u> wenn man die Pfeile addiert?

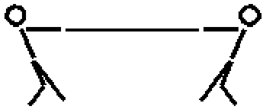


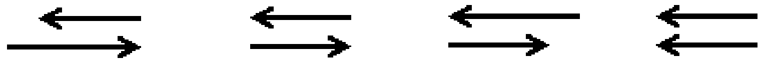
Kreuze an: O O O O

Abb. C.20: Nachtest-Fragebogen

45 45 k101

Zwei Jungen ziehen an einem Tau (siehe unten). Sie sind genau gleich stark. Das Seil bewegt sich nicht. Die Kräfte, mit denen die Jungen zu beiden Seiten ziehen, sind durch Pfeile dargestellt. Welche Abbildung beschreibt die Situation richtig?

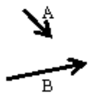




Kreuze an: O O O O

46 46 a14

Wie Zahlen kann man auch Pfeile subtrahieren. Subtrahiere Pfeil A von Pfeil B. Welcher Pfeil ist der Ergebnispfeil?



Kreuze an: O O O O

47 47 i101

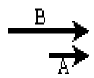
Welche der folgenden Größen lässt sich sinnvoll als Pfeil (mit Betrag und Richtung) darstellen?

	Volumen	Dichte	Temperatur	Stoß
Kreuze an:	O	O	O	O

Abb. C.21: Nachtest-Fragebogen

48 48 g16

Ein Auto wird schneller. Der Pfeil A steht für die Geschwindigkeit zu Anfang, der Pfeil B für die Geschwindigkeit später. Welcher Pfeil beschreibt den Geschwindigkeitsunterschied?



Kreuze an: O O O O

---

49 49 g17

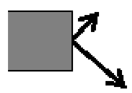
Ein Zug fährt langsam durch einen Bahnhof. Im Zug läuft eine Frau. Von draußen gesehen, bleibt die Frau <u>auf der STELLE.</u> Man kann die Geschwindigkeit des Zuges und die Geschwindigkeit der Frau als Pfeile darstellen. Welche Aussage ist richtig?

	Die Pfeile zeigen in entgegengesetzte Richtungen	Die Pfeile müssen in die gleiche Richtung zeigen.	Die Pfeile können in die entgegengesetzte Richtung zeigen, müssen aber nicht.	Die Pfeile stehen senkrecht zueinander.
Kreuze an:	O	O	O	O

---

50 50 k12

Zwei Männer ziehen mit zwei Seilen an einer schweren Kiste. Die Zugkräfte sind mit Pfeile dargestellt (siehe unten, von oben auf die Kiste gesehen). Die beiden Kräfte der Männer lassen sich addieren. Wie stark ziehen sie zusammen an der Kiste?

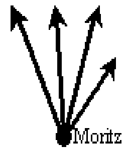


Kreuze an: O O O O

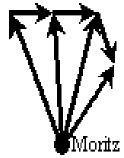
Abb. C.22: Nachtest-Fragebogen

51
Paula geht über den Schulhof. Moritz macht eine Zeichnung mit Pfeilen. Alle 20 Sekunden zeichnet er einen Pfeil. Der Pfeil stellt die Stelle von Moritz aus gesehen dar, wo sich Paula jeweils befindet. Welche Abbildung ist richtig?

51 o04



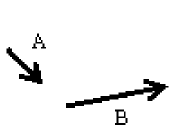
Man kann die Standorte nicht durch Pfeile beschreiben.



Kreuze an: O O O O

52
Ein Auto beschleunigt in einer Kurve. Der Pfeil A beschreibt die Geschwindigkeit vor der Kurve, der Pfeil B die Geschwindigkeit nach der Kurve. Welcher Pfeil beschreibt den Geschwindigkeitsunterschied?

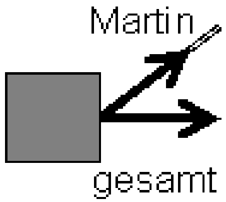
52 g18

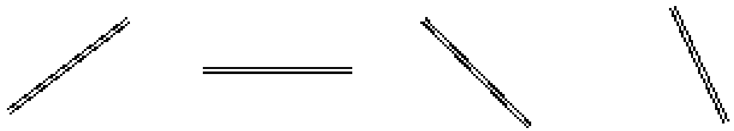


Kreuze an: O O O O

53
Martin und Moritz ziehen mit zwei Seilen an einer schweren Kiste. Die Kraft mit der Martin die Kiste zieht ist unten dargestellt (von oben auf die Kiste gesehen). Die Gesamtkraft der beiden ist auch dargestellt. In welche Ausrichtung hat das Seil von Moritz?

53 k110



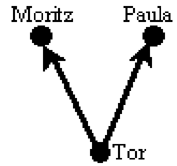


Kreuze an: O O O O

Abb. C.23: Nachtest-Fragebogen

54 54 o101

Paula steht rechts neben Moritz vom Tor aus gesehen. Wie kann man den Pfeil berechnen, der den Abstand von Moritz und Paula beschreibt?



Kreuze an:

Addition	Subtraktion	Es lässt sich nicht mit Pfeilen berechnen.	Verschiebung.
O	O	O	O

55 55 g103

Moritz fährt auf seinem Rad. Paula fährt gleichzeitig auf ihrem Rad genauso schnell in die entgegen gesetze Richtung. Die Geschwindigkeiten lassen sich mit Pfeile darstellen und addieren. Welche Bedeutung hat der Ergebnispfeil?

Kreuze an:

Der Ergebnispfeil beschreibt das Geschwindigkeits-verhältnis.	Der Ergebnispfeil steht für die Gesamt-geschwindigkeit.	Der Ergebnispfeil ist Null und hat deswegen keine Bedeutung.	Der Ergebnispfeil hat in diesem Zusammenhang keine Bedeutung.
O	O	O	O

Abb. C.24: Nachtest-Fragebogen

Anhang D

Ergebnistabellen

D.1 Hypothesenprüfende Untersuchung

D.1.1 Punktwerteverteilungen im Vortest

Punktwerteverteilungen des Vortest					
Gruppe			Skala Vortest	Subskala Kognitive Fähigkeit	Subskala Pfeile & Physik
T0					
	N		63	63	63
	Median		0,42	0,32	0,56
	Minimum		0,24	0,17	0,28
	Maximum		0,56	0,44	0,78
	Perzentile	25	0,36	0,28	0,50
		50	0,42	0,32	0,56
		75	0,48	0,38	0,67
T1					
	N		53	53	53
	Median		0,43	0,32	0,56
	Minimum		0,19	0,13	0,22
	Maximum		0,59	0,47	0,83
	Perzentile	25	0,33	0,26	0,42
		50	0,43	0,32	0,56
		75	0,47	0,37	0,64
T2					
	N		65	65	65
	Median		0,39	0,31	0,50
	Minimum		0,20	0,18	0,22
	Maximum		0,65	0,48	0,89
	Perzentile	25	0,34	0,27	0,44
		50	0,39	0,31	0,50
		75	0,46	0,35	0,61
BL					
	N		45	45	45
	Median		0,40	0,30	0,56
	Minimum		0,24	0,11	0,33
	Maximum		0,57	0,44	0,83
	Perzentile	25	0,33	0,26	0,44
		50	0,40	0,30	0,56
		75	0,45	0,33	0,61

Tab. D.1: Punktwerteverteilungen der Gruppen bezüglich des Vortests und seinen Subskalen

D.1.2 Normalverteilungen im Vortest

Normalverteilungs-Anpassungstest für Skala Vortest		
Gruppe		
T0		
	Mittelwert	0,42
	Standardabweichung	0,08
	df	63
	Kolmogorov-Smirnov-Z	0,61
	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,85
T1		
	Mittelwert	0,41
	Standardabweichung	0,10
	df	53
	Kolmogorov-Smirnov-Z	0,64
	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,80
T2		
	Mittelwert	0,40
	Standardabweichung	0,09
	df	65
	Kolmogorov-Smirnov-Z	0,59
	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,88
BL		
	Mittelwert	0,39
	Standardabweichung	0,08
	df	45
	Kolmogorov-Smirnov-Z	0,60
	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,86

Tab. D.2: Kolmogorov-Smirnov-Test auf Normalverteilung für Vortest-Skala

Normalverteilungs-Anpassungstest für Subskala „Kognitive Fähigkeiten“		
Gruppe		
T0		
	Mittelwert	0,32
	Standardabweichung	0,07
	df	63
	Kolmogorov-Smirnov-Z	0,62
	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,83
T1		
	Mittelwert	0,31
	Standardabweichung	0,08
	df	53
	Kolmogorov-Smirnov-Z	0,50
	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,97
T2		
	Mittelwert	0,31
	Standardabweichung	0,07
	df	65
	Kolmogorov-Smirnov-Z	0,61
	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,85
BL		
	Mittelwert	0,29
	Standardabweichung	0,07
	df	45
	Kolmogorov-Smirnov-Z	0,80
	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,55

Tab. D.3: Kolmogorov-Smirnov-Test auf Normalverteilung für die Subskala „Kognitive Fähigkeiten“

Normalverteilungs-Anpassungstest für Subskala „Pfeile und Physik“		
Gruppe		
T0		
	Mittelwert	0,55
	Standardabweichung	0,12
	df	63
	Kolmogorov-Smirnov-Z	1,01
	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,26
T1		
	Mittelwert	0,55
	Standardabweichung	0,15
	df	53
	Kolmogorov-Smirnov-Z	1,37
	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,05
T2		
	Mittelwert	0,53
	Standardabweichung	0,14
	df	65
	Kolmogorov-Smirnov-Z	0,87
	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,44
BL		
	Mittelwert	0,54
	Standardabweichung	0,13
	df	45
	Kolmogorov-Smirnov-Z	1,06
	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,21

Tab. D.4: Kolmogorov-Smirnov-Test auf Normalverteilung für Subskala „Pfeile und Physik“

D.1.3 Mittelwertvergleiche im Vortest

Mittelwerte für Skalen des Vortest

	Gruppe	N	Mittelwert	Standardabweich.
Skala Vortest (gesamt)				
	BL	45	0,39	0,08
	T0	63	0,42	0,08
	T1	53	0,41	0,10
	T2	65	0,40	0,09
	gesamt	226	0,41	0,09
Subskala „Kogn. Fähigkeiten“				
	BL	45	0,29	0,07
	T0	63	0,32	0,07
	T1	53	0,31	0,08
	T2	65	0,31	0,07
	gesamt	226	0,31	0,07
Subskala „Pfeile & Physik“				
	BL	45	0,54	0,13
	T0	63	0,55	0,12
	T1	53	0,55	0,15
	T2	65	0,53	0,14
	gesamt	226	0,54	0,13

Tab. D.5: Mittelwerte und Standardabweichungen der Gruppen bezüglich der Skalen des Vortests

Test der Homogenität der Varianzen	Levene-Statistik	df1	df2	Sig.
Skala Vortest (gesamt)	1,10	3	222	0,35
Subskala „Kognitive Fähigkeiten“	1,18	3	222	0,32
Subskala „Pfeile & Physik“	1,18	3	222	0,32

Tab. D.6: Levene-Test zur Prüfung der Homogenität der Varianzen im Vortest

Einfaktorielle Varianzanalyse der Skalen des Vortests	df	F	Signifikanz
Skala Vortest (gesamt)	3	0,77	0,51
Subskala „Kogn. Fähigkeiten“	3	1,34	0,26
Subskala „Pfeile & Physik“	3	0,31	0,82

Tab. D.7: Einfaktorielle Varianzanalyse der Skalen des Vortests

D.1.4 Punktwerteverteilungen im Nachtest

Punktwerteverteilungen des Nachtests

Gruppe			Skala Abstrakt	Skala Geschwin-digkeit	Skala Kraft	Skala Weitere
T0						
	N		63	63	63	63
	Median		0,83	0,56	0,44	0,50
	Minimum		0,17	0,19	0,19	0,25
	Maximum		1,00	0,94	0,75	0,92
	Perzentile	25	0,50	0,44	0,38	0,42
		50	0,83	0,56	0,44	0,50
		75	0,83	0,63	0,56	0,67
T1						
	N		53	53	53	53
	Median		0,67	0,50	0,50	0,58
	Minimum		0,17	0,25	0,25	0,25
	Maximum		1,00	0,88	0,75	0,92
	Perzentile	25	0,54	0,44	0,38	0,50
		50	0,67	0,50	0,50	0,58
		75	0,75	0,63	0,56	0,67
T2						
	N		65	65	65	65
	Median		0,58	0,56	0,50	0,58
	Minimum		0,17	0,19	0,25	0,25
	Maximum		1,00	0,81	0,81	0,83
	Perzentile	25	0,42	0,44	0,44	0,50
		50	0,58	0,56	0,50	0,58
		75	0,71	0,69	0,56	0,75
BL						
	N		45	45	45	45
	Median		0,33	0,44	0,38	0,42
	Minimum		0,17	0,19	0,19	0,25
	Maximum		0,75	0,75	0,69	0,75
	Perzentile	25	0,33	0,31	0,31	0,42
		50	0,33	0,44	0,38	0,42
		75	0,42	0,50	0,50	0,58

Tab. D.8: Punktwerteverteilungen der Gruppen bezüglich der Skalen des Nachtests

D.1.5 Normalverteilung im Nachtest

Normalverteilungs-Anpassungstest für die Skala Abstrakt		
Gruppe		
T0		
	N	63
	Mittelwert	0,70
	Standardabweichung	0,21
	Kolmogorov-Smirnov-Z	1,93
	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,00
T1		
	N	53
	Mittelwert	0,65
	Standardabweichung	0,17
	Kolmogorov-Smirnov-Z	0,77
	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,60
T2		
	N	65
	Mittelwert	0,58
	Standardabweichung	0,21
	Kolmogorov-Smirnov-Z	1,09
	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,18
BL		
	N	45
	Mittelwert	0,39
	Standardabweichung	0,13
	Kolmogorov-Smirnov-Z	1,49
	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,02

Tab. D.9: Kolmogorov-Smirnov-Test auf Normalverteilung für die Skala Abstrakt

Normalverteilungs-Anpassungstest für die Skala Geschwindigkeit		
Gruppe		
T0		
	N	63
	Mittelwert	0,52
	Standardabweichung	0,16
	Kolmogorov-Smirnov-Z	0,80
	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,54
T1		
	N	53
	Mittelwert	0,53
	Standardabweichung	0,14
	Kolmogorov-Smirnov-Z	0,68
	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,74
T2		
		65
	Mittelwert	0,55
	Standardabweichung	0,16
	Kolmogorov-Smirnov-Z	0,93
	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,36
BL		
	N	45
	Mittelwert	0,43
	Standardabweichung	0,13
	Absolut	0,13
	Positiv	0,13
	Negativ	-0,13
	Kolmogorov-Smirnov-Z	0,85
	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,46

Tab. D.10: Kolmogorov-Smirnov-Test auf Normalverteilung für die Skala Geschwindgkeit

Normalverteilungs-Anpassungstest für die Skala Kraft		
Gruppe		
T0		
	N	63
	Mittelwert	0,45
	Standardabweichung	0,13
	Kolmogorov-Smirnov-Z	0,81
	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,53
T1		
		53
	Mittelwert	0,47
	Standardabweichung	0,11
	Kolmogorov-Smirnov-Z	0,88
	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,42
T2		
		65
	Mittelwert	0,48
	Standardabweichung	0,11
	Kolmogorov-Smirnov-Z	1,13
	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,16
BL		
		45
	Mittelwert	0,42
	Standardabweichung	0,11
	Kolmogorov-Smirnov-Z	1,24
	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,09

Tab. D.11: Kolmogorov-Smirnov-Test auf Normalverteilung für die Skala Kraft

Normalverteilungs-Anpassungstest für die Skala Weitere		
Gruppe		
T0		
	N	63
	Mittelwert	0,54
	Standardabweichung	0,15
	Kolmogorov-Smirnov-Z	1,21
	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,11
T1		
	N	53
	Mittelwert	0,59
	Standardabweichung	0,14
	Kolmogorov-Smirnov-Z	0,96
	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,32
T2		
	N	65
	Mittelwert	0,61
	Standardabweichung	0,15
	Kolmogorov-Smirnov-Z	1,17
	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,13
BL		
	N	45
	Mittelwert	0,48
	Standardabweichung	0,13
	Kolmogorov-Smirnov-Z	1,35
	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,05

Tab. D.12: Kolmogorov-Smirnov-Test auf Normalverteilung für die Skala Weitere

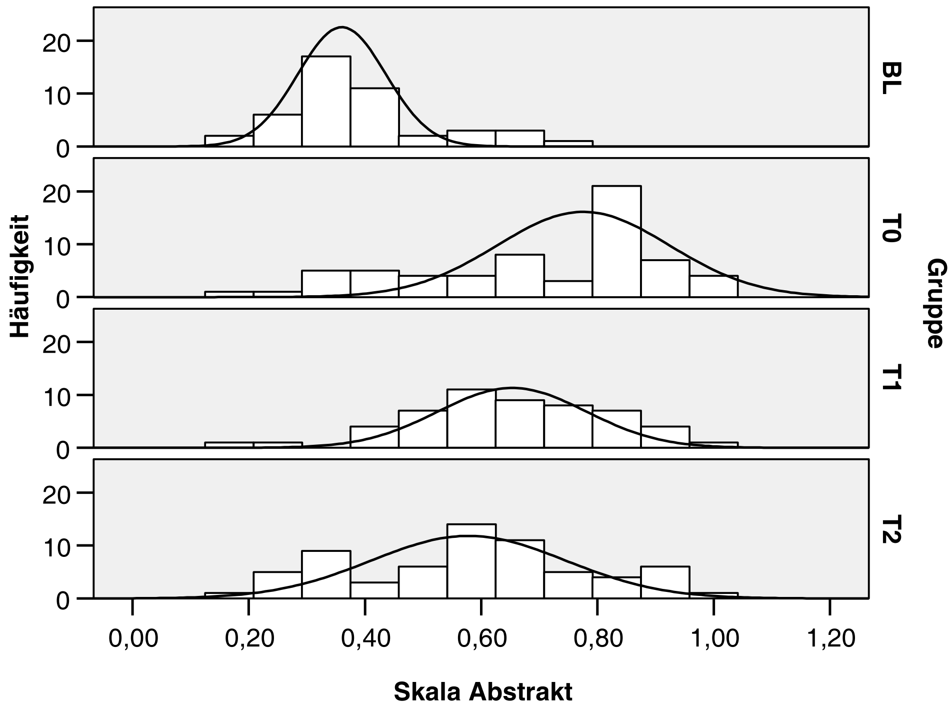


Abb. D.1: Häufigkeiten der Punktwerte der Skala Abstrakt für alle Gruppen (Das Histogramm ist aus Darstellungsgründen bis 1,20 gezeichnet. Alle Skalen sind auf 1 normiert.)

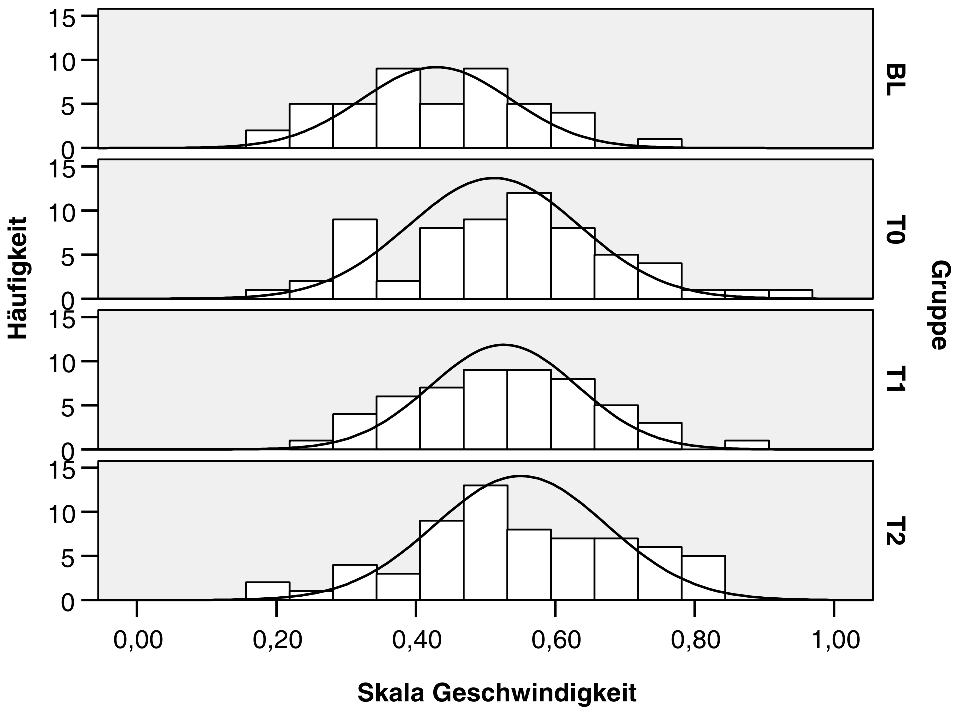


Abb. D.2: Häufigkeiten der Punktwerte der Skala Geschwindigkeit für alle Gruppen

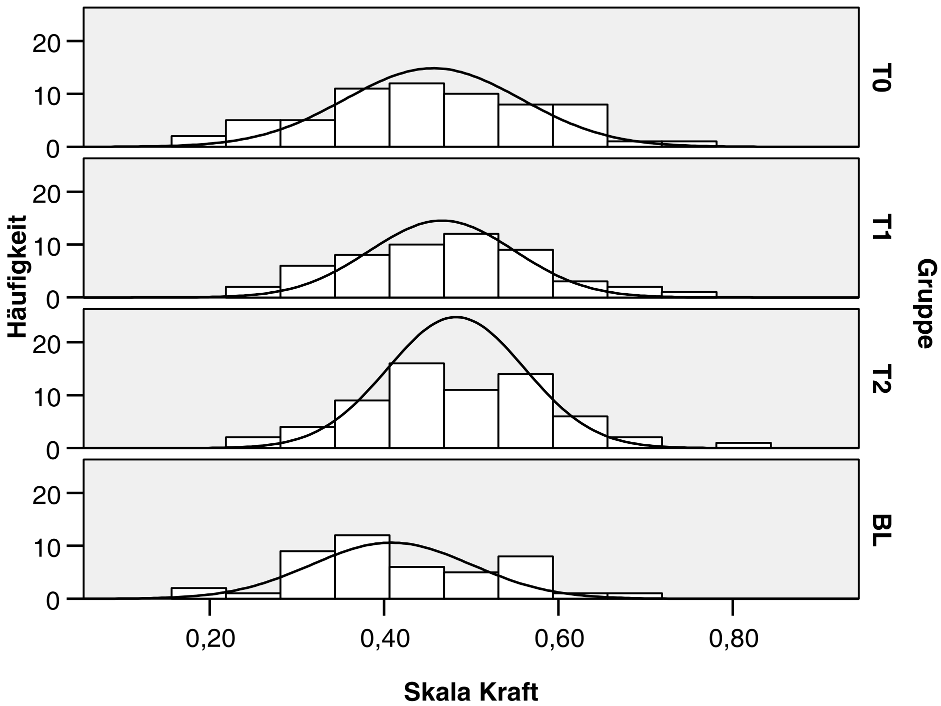


Abb. D.3: Häufigkeiten der Punktwerte der Skala Kraft für alle Gruppen

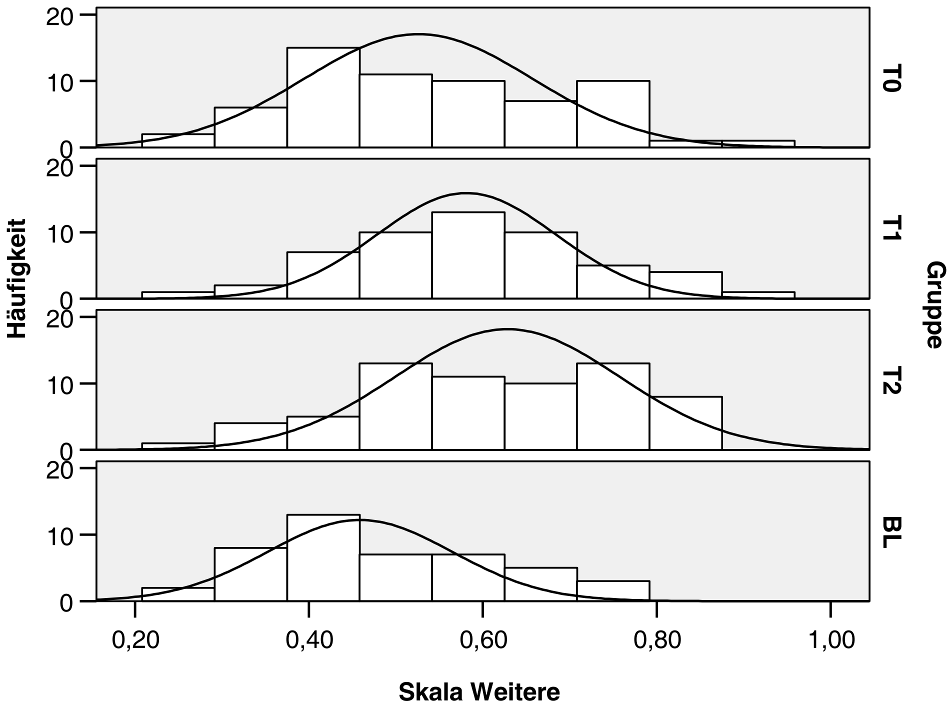


Abb. D.4: Häufigkeiten der Punktwerte der Skala Weitere für alle Gruppen

D.1.6 Mittelwertvergleiche im Nachtest

Mittelwerte für Skalen des Nachtests

Skala	Gruppe	N	Mittelwert	Standardabweichung
Abstrakt				
	BL	45	0,39	0,13
	T0	63	0,70	0,21
	T1	53	0,65	0,17
	T2	65	0,58	0,21
	gesamt	226	0,59	0,22
Geschwindigkeit				
	BL	45	0,43	0,13
	T0	63	0,52	0,16
	T1	53	0,53	0,14
	T2	65	0,55	0,16
	gesamt	226	0,51	0,15
Kraft				
	BL	45	0,42	0,11
	T0	63	0,45	0,13
	T1	53	0,47	0,11
	T2	65	0,48	0,11
	gesamt	226	0,46	0,12
Weitere				
	BL	45	0,48	0,13
	T0	63	0,54	0,15
	T1	53	0,59	0,14
	T2	65	0,61	0,15
	gesamt	226	0,56	0,15

Tab. D.13: Mittelwerte der Gruppen bezüglich der Skalen des Nachtests

Test der Homogenität der Varianzen

Skala	Levene-Statistik	df1	df2	Signifikanz
Abstrakt				
	5,32	3	222	0,00
Geschwindigkeit				
	0,80	3	222	0,49
Kraft				
	0,64	3	222	0,59
Weitere				
	0,87	3	222	0,46

Tab. D.14: Levene-Test zur Prüfung der Homogenität der Varianzen bezüglich der Skalen des Nachtests

Einfaktorielle Varianzanalyse

Skala	df	F	Signifikanz
Abstrakt			
	3	25,58	0,00
Geschwindigkeit			
	3	6,37	0,00
Kraft			
	3	2,87	0,04
Weitere			
	3	7,56	0,00

Tab. D.15: Einfaktorielle Varianzanalyse der Skalen des Nachtests

Robuste Testverfahren zur Prüfung auf Gleichheit der Mittelwerte

Skala	Test	**Statistik** (Asymptotisch F-verteilt)	df1	df2	Sig.
Abstrakt					
	Welch-Test	37,76	3	123	0,00
	Brown-Forsythe	27,20	3	216	0,00

Tab. D.16: Testverfahren zur Prüfung der Gleichheit der Mittelwerte mit Berücksichtigung der Varianzinhomogenität der Skala Abstrakt

Übersicht Hypothesenvalidierung

Skala	Vergleich & Hypothese		Signifikanz		Deutung
	Varianzanalyse				
Abstrakt			0,00	2-seit.,korr.	$\neq$
Geschwindig.			0,00	2-seitig	$\neq$
Kraft			0,04	s. o.	$\neq$
Weitere			0,00	s. o.	$\neq$
	1. Kontrast				
Abstrakt	H_1 :	T0 T1 T2>BL	0,00	1-seit.,korr.	$>$
Geschwindig.	H_1 :	s. o.	0,00	1-seitig	$>$
Kraft	H_1 :	s. o.	0,01	s. o.	$>$
Weitere	H_1 :	s. o.	0,00	s. o.	$>$
	2.Kontrast				
Abstrakt	H_{2a} :	T0 > T1 T2	0,01	1-seit.,korr.	$>$
Geschwindig.	H_{3a} :	T1 T2 > T0	0,28	1-seitig	$\not>$
Kraft	H_{3a} :	T2 > T0 T1	0,10	s. o.	$\not>$
Weitere	H_{4a} :	T1 T2 > T0	0,01	s. o.	$>$
	3.Kontrast				
Abstrakt	H_{2b} :	T1 = T2	0,05	2-seit.,korr.	$\neq$ (=)
Geschwindig.	H_{3b} :	T1 = T2	0,43	s. o.	$=$
Kraft	H_{4a} :	T1 > T0	0,23	1-seitig	$\not>$
Weitere	H_{4b} :	T2 > T1	0,19	s. o.	$\not>$

Tab. D.17: Übersichtstabelle für die Varianzanalyse und alle Kontraste zur Prüfung der Hypothesen. Die Deutung der Signifikanz ist durch Relationszeichen dargestellt und bezieht sich auf die gegenübergestellten Gruppen des jeweiligen Kontrastes. Wahrscheinlichkeiten für 1- bzw. 2-seitige Signifikanztests, korrigierte Rechenverfahren (korr.) bei inhomogener Varianzen

Geplante Kontraste

Skala	**Kontrast**	**T**	**df**	**Signifikanz**		**Effekt-stärke**
Abstrakt						
	1	10,25	99	0,00	1-seitig, korr.	0,72
	2	-2,57	114	0,01	1-seitig, korr.	0,23
	3	-2,01	116	0,05	2-seitig, korr.	0,18
Geschwin-digkeit	1	4,23	222	0,00	1-seitig	0,27
	2	0,57	222	0,28	1-seitig	
	3	0,80	222	0,43	2-seitig	
Kraft						
	1	2,50	222	0,01	1-seitig	0,17
	2	1,29	222	0,10	1-seitig	
	3	0,73	222	0,23	1-seitig	
Weitere						
	1	3,89	222	0,00	1-seitig	0,25
	2	2,55	222	0,01	1-seitig	0,17
	3	0,87	222	0,19	1-seitig	

Tab. D.18: Geplante Kontraste für alle Gruppe bezüglich der Skalen des Nachtests

D.2 Exploration

D.2.1 Mittelwertvergleiche im Vortest

Mittelwerte der geteilten Gruppen im Vortest

Teilgruppe		N	Mittelwert	Standard-abweichung
schwach				
	BL	25	0,34	0,06
	T0	28	0,34	0,05
	T1	23	0,32	0,06
	T2	36	0,34	0,04
	gesamt	112	0,34	0,05
stark				
	BL	20	0,46	0,04
	T0	35	0,48	0,04
	T1	30	0,48	0,05
	T2	29	0,48	0,06
	gesamt	114	0,47	0,05

Tab. D.19: Mittelwerte der nach Lernleistung getrennten Gruppen im Vortest

Test der Homogenität der Varianzen

Teilgruppe	Levene-Statistik	df1	df2	Signifikanz
schwach				
	1,36	3	108	0,26
stark				
	0,92	3	110	0,44

Tab. D.20: Homogenität der Varianzen der Teilgruppen im Vortest

Varianzanalysen der geteilten Gruppen im Vortest

Teilgruppe	df	F	Signifikanz
schwach			
	3	1,41	0,24
stark			
	3	0,72	0,54

Tab. D.21: Varianzanalyse der Teilgruppen im Vortest

D.2.2 Punktwerteverteilungen im Nachtest

Punktwerteverteilungen für die lernschwachen Teilgruppen

Gruppe			Skala Abstrakt	Skala Geschwindigkeit	Skala Kraft	Skala Weitere
T0						
	N		28	28	28	28
	Median		0,54	0,44	0,38	0,42
	Minimum		0,25	0,19	0,19	0,25
	Maximum		1,00	0,75	0,56	0,83
	Perzentile	25	0,42	0,31	0,31	0,35
		50	0,54	0,44	0,38	0,42
		75	0,81	0,56	0,50	0,56
T1						
	N		23	23	23	23
	Median		0,58	0,50	0,44	0,50
	Minimum		0,17	0,25	0,25	0,25
	Maximum		0,83	0,69	0,69	0,75
	Perzentile	25	0,50	0,38	0,31	0,42
		50	0,58	0,50	0,44	0,50
		75	0,67	0,56	0,50	0,58
T2						
	N		36	36	36	36
	Median		0,50	0,50	0,44	0,58
	Minimum		0,17	0,19	0,25	0,25
	Maximum		0,92	0,69	0,69	0,83
	Perzentile	25	0,33	0,38	0,39	0,50
		50	0,50	0,50	0,44	0,58
		75	0,65	0,56	0,55	0,75
BL						
	N		25	25	25	25
	Median		0,33	0,38	0,38	0,42
	Minimum		0,17	0,19	0,19	0,25
	Maximum		0,67	0,75	0,69	0,67
	Perzentile	25	0,33	0,31	0,31	0,42
		50	0,33	0,38	0,38	0,42
		75	0,42	0,53	0,53	0,58

Tab. D.22: Punktwerteverteilungen der Teilgruppe der Lernschwachen für alle Skalen des Nachtests

Punktwerteverteilungen für die lernstarken Teilgruppen

Gruppe			Skala Abstrakt	Skala Geschwindigkeit	Skala Kraft	Skala Weitere
T0						
	N		35	35	35	35
	Median		0,83	0,56	0,50	0,58
	Minimum		0,17	0,31	0,25	0,33
	Maximum		1,00	0,94	0,75	0,92
	Perzentile	25	0,75	0,50	0,44	0,50
		50	0,83	0,56	0,50	0,58
		75	0,92	0,69	0,63	0,75
T1						
	N		30	30	30	30
	Median		0,71	0,56	0,50	0,67
	Minimum		0,42	0,38	0,31	0,33
	Maximum		1,00	0,88	0,75	0,92
	Perzentile	25	0,58	0,44	0,44	0,56
		50	0,71	0,56	0,50	0,67
		75	0,83	0,69	0,56	0,75
T2						
	N		29	29	29	29
	Median		0,67	0,69	0,50	0,58
	Minimum		0,33	0,44	0,25	0,33
	Maximum		1,00	0,81	0,81	0,83
	Perzentile	25	0,58	0,56	0,44	0,50
		50	0,67	0,69	0,50	0,58
		75	0,79	0,75	0,56	0,75
BL						
	N		20	20	20	20
	Median		0,42	0,44	0,41	0,46
	Minimum		0,17	0,25	0,31	0,25
	Maximum		0,75	0,63	0,56	0,75
	Perzentile	25	0,33	0,38	0,33	0,35
		50	0,42	0,44	0,41	0,46
		75	0,56	0,50	0,50	0,65

Tab. D.23: Punktwerteverteilungen der Teilgruppe der Lernstarken für alle Skalen des Nachtests

D.2.3 Normalverteilung im Nachtest

Normalverteilungs-Anpassungstest für die Skala Abstrakt			
Teilgruppe			
T0	**schwach**		
		N	28
		Mittelwert	0,57
		Standardabweichung	0,21
		Kolmogorov-Smirnov-Z	0,76
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,60
	stark		
		N	35
		Mittelwert	0,80
		Standardabweichung	0,16
		Kolmogorov-Smirnov-Z	1,78
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,00
T1	**schwach**		
		N	23
		Mittelwert	0,59
		Standardabweichung	0,17
		Kolmogorov-Smirnov-Z	0,71
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,69
	stark		
		N	30
		Mittelwert	0,70
		Standardabweichung	0,16
		Kolmogorov-Smirnov-Z	0,89
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,41

Tab. D.24: Test auf Normalverteilung der Teilgruppen im Nachtest

Normalverteilungs-Anpassungstest für die Skala Abstrakt			
Teilgruppe			
T2	**schwach**		
		N	36
		Mittelwert	0,50
		Standardabweichung	0,20
		Kolmogorov-Smirnov-Z	1,07
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,20
	stark		
		N	29
		Mittelwert	0,68
		Standardabweichung	0,16
		Kolmogorov-Smirnov-Z	0,88
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,42
BL	**schwach**		
		N	25
		Mittelwert	0,37
		Standardabweichung	0,10
		Kolmogorov-Smirnov-Z	1,32
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,06
	stark		
		N	20
		Mittelwert	0,42
		Standardabweichung	0,16
		Kolmogorov-Smirnov-Z	0,94
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,34

Tab. D.25: Test auf Normalverteilung der Teilgruppen im Nachtest

Normalverteilungs-Anpassungstest für die Skala Geschwindigkeit			
Teilgruppe			
T0	**schwach**		
		N	28
		Mittelwert	0,44
		Standardabweichung	0,14
		Kolmogorov-Smirnov-Z	0,81
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,53
	stark		
		N	35
		Mittelwert	0,59
		Standardabweichung	0,15
		Kolmogorov-Smirnov-Z	0,68
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,75
T1	**schwach**		
		N	23
		Mittelwert	0,46
		Standardabweichung	0,12
		Kolmogorov-Smirnov-Z	0,91
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,38
	stark		
		N	30
		Mittelwert	0,58
		Standardabweichung	0,13
		Kolmogorov-Smirnov-Z	0,73
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,66

Tab. D.26: Test auf Normalverteilung der Teilgruppen im Nachtest

Normalverteilungs-Anpassungstest für die Skala Geschwindigkeit			
Teilgruppe			
T2	**schwach**		
		N	36
		Mittelwert	0,47
		Standardabweichung	0,13
		Kolmogorov-Smirnov-Z	0,93
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,35
	stark		
		N	29
		Mittelwert	0,65
		Standardabweichung	0,12
		Kolmogorov-Smirnov-Z	0,90
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,40
BL	**schwach**		
		N	25
		Mittelwert	0,42
		Standardabweichung	0,15
		Kolmogorov-Smirnov-Z	0,83
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,50
	stark		
		N	20
		Mittelwert	0,45
		Standardabweichung	0,11
		Kolmogorov-Smirnov-Z	0,62
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,84

Tab. D.27: Test auf Normalverteilung der Teilgruppen im Nachtest

Normalverteilungs-Anpassungstest für die Skala Kraft			
Teilgruppe			
T0			
	schwach		
		N	28
		Mittelwert	0,39
		Standardabweichung	0,11
		Kolmogorov-Smirnov-Z	0,76
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,61
	stark		
		N	35
		Mittelwert	0,51
		Standardabweichung	0,12
		Kolmogorov-Smirnov-Z	0,88
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,43
T1	**schwach**		
		N	23
		Mittelwert	0,41
		Standardabweichung	0,10
		Kolmogorov-Smirnov-Z	0,70
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,72
	stark		
		N	30
		Mittelwert	0,51
		Standardabweichung	0,10
		Kolmogorov-Smirnov-Z	0,87
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,43

Tab. D.28: Test auf Normalverteilung der Teilgruppen im Nachtest

Normalverteilungs-Anpassungstest für die Skala Kraft			
Teilgruppe			
T2		**schwach**	
		N	36
		Mittelwert	0,47
		Standardabweichung	0,10
		Kolmogorov-Smirnov-Z	0,92
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,36
	stark		
		N	29
		Mittelwert	0,50
		Standardabweichung	0,12
		Kolmogorov-Smirnov-Z	0,93
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,36
BL	**schwach**		
		N	25
		Mittelwert	0,42
		Standardabweichung	0,13
		Kolmogorov-Smirnov-Z	0,90
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,39
	stark		
		N	20
		Mittelwert	0,43
		Standardabweichung	0,09
		Kolmogorov-Smirnov-Z	0,90
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,39

Tab. D.29: Test auf Normalverteilung der Teilgruppen im Nachtest

Normalverteilungs-Anpassungstest für die Skala Weitere			
Teilgruppe			
T0	**schwach**		
		N	28
		Mittelwert	0,46
		Standardabweichung	0,14
		Kolmogorov-Smirnov-Z	1,09
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,19
	stark		
		N	35
		Mittelwert	0,60
		Standardabweichung	0,14
		Kolmogorov-Smirnov-Z	0,85
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,46
T1	**schwach**		
		N	23
		Mittelwert	0,52
		Standardabweichung	0,12
		Kolmogorov-Smirnov-Z	0,70
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,72
	stark		
		N	30
		Mittelwert	0,64
		Standardabweichung	0,14
		Kolmogorov-Smirnov-Z	0,67
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,77

Tab. D.30: Test auf Normalverteilung der Teilgruppen im Nachtest

Normalverteilungs-Anpassungstest für die Skala Weitere			
Teilgruppe			
T2	**schwach**		
		N	36
		Mittelwert	0,60
		Standardabweichung	0,15
		Kolmogorov-Smirnov-Z	0,88
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,42
	stark		
		N	29
		Mittelwert	0,63
		Standardabweichung	0,15
		Kolmogorov-Smirnov-Z	0,93
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,35
BL	**schwach**		
		N	25
		Mittelwert	0,47
		Standardabweichung	0,12
		Kolmogorov-Smirnov-Z	1,03
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,24
	stark		
		N	20
		Mittelwert	0,50
		Standardabweichung	0,16
		Kolmogorov-Smirnov-Z	0,87
		Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	0,44

Tab. D.31: Test auf Normalverteilung der Teilgruppen im Nachtest

D.2.4 Mittelwertvergleiche im Nachtest

Übersicht Exploration

Skala	Vergleich & Hypothese		Teilgruppe Lernschwach Signifikanz		Deutung	Teilgruppe Lernstark Signifikanz		Deutung
	Varianzanalyse							
Abstrakt			,00	2-seit.,korr.	$\neq$	,00	2-seitig	$\neq$
Geschwindig.			,48	2-seitig	$=$	,00	s. o.	$\neq$
Kraft			,03	s. o.	$\neq$	,04	s. o.	$\neq$
Weitere			,00	s. o.	$\neq$	,01	s. o.	$\neq$
	1. Kontrast							
Abstrakt	H_1:	T0 T1 T2 $>$ BL	,00	1-seit.,korr.	$>$	,00	1-seitig	$>$
Geschwindig.	s. o.	s. o.	,08	1-seitig	$\not>$	,00	s. o.	$>$
Kraft	s. o.	s. o.	,38	s. o.	$\not>$	,00	s. o.	$>$
Weitere	s. o.	s. o.	,04	s. o.	$>$	,00	s. o.	$>$
	2.Kontrast							
Abstrakt	H_{2a}:	T0 $>$ T1 T2	,26	1-seit.,korr.	$\not>$	,00	1-seitig	$>$
Geschwindig.	H_{3a}:	T1 T2 $>$ T0	,26	1-seitig	$\not>$	,19	s. o.	$\not>$
Kraft	H_{3a}:	T2 $>$ T0 T1	,00	s. o.	$>$	,41	s. o.	$\not>$
Weitere	H_{4a}:	T1 T2 $>$ T0	,00	s. o.	$>$	,15	s. o.	$\not>$
	3.Kontrast							
Abstrakt	H_{2b}:	T1 $=$ T2	,07	2-seit.,korr	$=$	,75	2-seitig	$=$
Geschwindig.	H_{3b}:	T1 $=$ T2	,89	2-seitig	$=$	,03	s. o.	$\neq$
Kraft	H_{4a}:	T1 $>$ T0	,19	1-seitig	$\not>$	,43	1-seitig	$\not>$
Weitere	H_{4b}:	T2 $>$ T1	,02	s. o.	$>$	,37	s. o.	$\not>$

Tab. D.32: Übersichtstabelle für die Varianzanalysen und Kontraste für die nach Lernleistung getrennten Gruppen. Die Deutung der Signifikanz ist durch Relationszeichen dargestellt und bezieht sich auf die gegenübergestellten Gruppen des jeweiligen Kontrastes.

Mittelwerte der lernschwachen Teilgruppen

Skala	Teilgruppe Lernschwach	N	Mittelwert	Standard-abweichung
Abstrakt				
	BL	25	0,37	0,10
	T0	28	0,57	0,21
	T1	23	0,59	0,17
	T2	36	0,50	0,20
	gesamt	112	0,51	0,20
Geschwindigkeit				
	BL	25	0,42	0,15
	T0	28	0,44	0,14
	T1	23	0,46	0,12
	T2	36	0,47	0,13
	gesamt	112	0,45	0,13
Kraft				
	BL	25	0,42	0,13
	T0	28	0,39	0,11
	T1	23	0,41	0,10
	T2	36	0,47	0,10
	gesamt	112	0,42	0,11
Weitere				
	BL	25	0,47	0,12
	T0	28	0,46	0,14
	T1	23	0,52	0,12
	T2	36	0,60	0,15
	gesamt	112	0,52	0,15

Tab. D.33: Mittelwerte der lernschwachen Teilgruppen für alle Skalen

Test der Homogenität der Varianzen für Lernschwache				
Skala	**Levene-Statistik**	**df1**	**df2**	**Signifikanz**
Abstrakt				
	5,61	3	108	0,00
Geschwindigkeit				
	0,51	3	108	0,67
Kraft				
	1,08	3	108	0,36
Weitere				
	1,04	3	108	0,38

Tab. D.34: Test der Varianzhomogenität der lernschwachen Teilgruppen für alle Skalen

Varianzanalyse für Lernschwache			
Skala	**df**	**F**	**Signifikanz**
Abstrakt			
	3	8,00	0,00
Geschwindigkeit			
	3	0,83	0,48
Kraft			
	3	3,24	0,02
Weitere			
	3	6,47	0,00

Tab. D.35: Varianzanalyse der lernschwachen Teilgruppen für alle Skalen des Nachtests

Robuste Tests zur Prüfung auf Gleichheit der Mittelwerte					
Skala	**Statistik**		**df1**	**df2**	**Signifikanz**
Abstrakt					
	Welch-Test	13,95	3	57	0,00
	Brown-Forsythe	8,48	3	96	0,00

Tab. D.36: Mittelwertvergleiche der schwachen Teilgruppen bezüglich der Skala Abstrakt wegen inhomogener Varianzen

Kontraste für Lernschwache

Skala	Kontrast	T	df	Signifikanz	
Abstrakt					
	1	6,32	74	0,00	1-seitig, korr.
	2	-0,65	49	0,26	1-seitig, korr.
	3	-1,88	53	0,07	2-seitig, korr.
Geschwindigkeit					
	1	1,39	108	0,08	1-seitig
	2	0,65	108	0,26	1-seitig
	3	0,14	108	0,89	2-seitig
Kraft					
	1	0,31	108	0,38	1-seitig
	2	2,89	108	0,00	1-seitig
	3	0,87	108	0,19	1-seitig
Weitere					
	1	1,72	108	0,04	1-seitig
	2	2,98	108	0,00	1-seitig
	3	2,19	108	0,02	1-seitig

Tab. D.37: Geplante Kontraste für lernschwache Teilgruppen bezüglich aller Skalen des Nachtests

Mittelwerte der lernstarken Teilgruppen

Skala	Teilgruppe Lernstarke	N	Mittelwert	Standard-abweichung
Abstrakt				
	BL	20	0,42	0,16
	T0	35	0,80	0,16
	T1	30	0,70	0,16
	T2	29	0,68	0,16
	gesamt	114	0,68	0,20
Geschwindigkeit				
	BL	20	0,45	0,11
	T0	35	0,59	0,15
	T1	30	0,58	0,13
	T2	29	0,65	0,12
	gesamt	114	0,58	0,14
Kraft				
	BL	20	0,43	0,09
	T0	35	0,51	0,12
	T1	30	0,51	0,10
	T2	29	0,50	0,12
	gesamt	114	0,49	0,11
Weitere				
	BL	20	0,50	0,16
	T0	35	0,60	0,14
	T1	30	0,64	0,14
	T2	29	0,63	0,15
	gesamt	114	0,60	0,15

Tab. D.38: Mittelwerte der lernstarken Teilgruppen für alle Skalen des Nachtests

Test der Homogenität der Varianz für Lernstarke

Skala	Levene-Statistik	df1	df2	Signifikanz
Abstrakt				
	0,29	3	110	0,83
Geschwindigkeit				
	0,68	3	110	0,57
Kraft				
	0,83	3	110	0,48
Weitere				
	0,36	3	110	0,78

Tab. D.39: Prüfung der Varianzhomogenität der lernstarken Teilgruppen

Varianzanalyse für Lernstarke

Skala	df	F	Signifikanz
Abstrakt			
	3	23,56	0,00
Geschwindigkeit			
	3	9,87	0,00
Kraft			
	3	2,95	0,04
Weitere			
	3	4,43	0,01

Tab. D.40: Varianzanalyse der lernstarken Teilgruppen

Geplante Kontraste für Lernstarke

Skala	Kontrast	T	df	Signifikanz	
Abstrakt					
	1	7,69	110	0,00	1-seitig
	2	-3,11	110	0,00	1-seitig
	3	-0,32	110	0,75	2-seitig
Geschwindigkeit					
	1	4,95	110	0,00	1-seitig
	2	0,89	110	0,19	1-seitig
	3	2,18	110	0,03	2-seitig
Kraft					
	1	2,96	110	0,00	1-seitig
	2	-0,23	110	0,41	1-seitig
	3	0,18	110	0,43	1-seitig
Weitere					
	1	3,51	110	0,00	1-seitig
	2	1,05	110	0,15	1-seitig
	3	-0,33	110	0,37	1-seitig

Tab. D.41: Geplante Kontraste für lernstarke Teilgruppen

D.2.5 Baselinegruppen-Vergleich im Nachtest

Mittelwerte der lernstarken und lernschwachen Baselinegruppe

Skala	Baselinegruppe	N	Mittelwert	Standard-abweichung
Abstrakt				
	schwach	25	0,37	0,10
	stark	20	0,42	0,16
Geschwindigkeit				
	schwach	25	0,42	0,15
	stark	20	0,45	0,11
Kraft				
	schwach	25	0,42	0,13
	stark	20	0,43	0,09
Weitere				
	schwach	25	0,47	0,12
	stark	20	0,50	0,16

Tab. D.42: Mittelwerte der lernstarken und lernschwachen Baselinegruppe bezüglich aller Skalen des Nachtests

Mittelwertvergleiche zwischen lernstarker und lernschwacher Baselinegruppe

	Levene-Test		T-Test		
Skala	**F**	**Signifikanz**	**T**	**df**	**Signifikanz**
Abstrakt					
	3,46	0,07	-1,37	43	0,18
Geschwindigkeit					
	3,44	0,07	-0,80	43	0,43
Kraft					
	1,58	0,22	-0,29	43	0,77
Weitere					
	2,02	0,16	-0,55	43	0,58

Tab. D.43: Levene-Test zur Prüfung der Varianzgleichheit und T-Test für den Vergleich der Mittelwerte der lernstarken und lernschwachen Baselinegruppe bezüglich aller Skalen des Nachtests

D.2.6 Post-hoc-Test im Nachtest

Post-hoc-Vergleiche für Skala Weitere

Teilgruppe	Paarvergleich	Mittlere Differenz	Standard-fehler	Signifikanz
Lernschwach				
	BL vs. T0	0,01	0,04	0,81
	BL vs. T1	-0,04	0,04	0,26
	BL vs. T2	-0,12	0,04	0,00
	T0 vs. T1	-0,05	0,04	0,16
	T0 vs. T2	-0,13	0,03	0,00
	T1 vs. T2	-0,08	0,04	0,03

Tab. D.44: Paarweise T-Tests ohne α-Fehler-Korrektur für lernschwache Teilgruppen bezüglich der Skala Weitere

Anhang E

Abkürzungen

Abkürzung	Bedeutung
*	signifikant
1-seitig, 1-seit.	einseitiger / gerichter Test
2-seitig, 2-seit.	zweiseitiger / unrichter Test
Beweg.	Bewegung
BL	Baselinegruppe
df	Freiheitsgrade
F	Kennwert des F-Tests (siehe z. B. Field, 2005)
Geschw., Geschwind., Geschwindig.	Geschwindigkeit
KFT	„Kognitiver Fähigkeitstest“ (Heller und Perleth, 2000)
kogn.	kognitive
korr.	korrigiertes Rechenverfahren (im Fall inhomogener Varianzen)
N	Anzahl der Versuchspersonen
n. s.	nicht signifikant
PISA	Programme for International Student Assessment
Sig.	Signifikanz
T	Kennwert des T-Tests (siehe z. B. Field, 2005)
T0	Treatmentgruppe 0
T1	Treatmentgruppe 1
T2	Treatmentgruppe 2
TIMSS	Third International Mathematics and Science Study

Danksagung

Ohne die Unterstützung zahlreicher Menschen hätte ich diese Arbeit nicht realisieren können. Meinem Doktorvater Lutz-Helmut Schön danke ich für die Betreuung in all den Jahren. Stets optimistisch hat er mit seinem Motto „Es wird alles gut werden." recht behalten. Dieses Projekt (und auch viele spannende andere) hat er nicht nur finanziell möglich gemacht, sondern durch steten Ideenreichtum und hilfreiche Kritik vorangebracht.

Lydia Murmann danke ich nicht nur für die schöne Zeit im gemeinsamen Büro, sondern insbesondere für die so ergiebigen Gespräche und Diskussionen, die maßgeblich für Klarheit in meinem Kopf sorgten. Es waren die wichtigsten Gespräche zu meiner Doktorarbeit.

Diana Heintze aus dem Institut für Psychologie gilt mein Dank für die immer freundliche Unterstützung beim Finden und Verstehen der statistischen Verfahren zur Auswertung meiner Daten. Durch sie sind Signifikanz, Varianzanalyse und geplante Kontraste keine Mysterien mehr.

Bei meinen Mitstreitern Marc Müller, Nico Westphal und Johannes Grebe-Ellis bedanke ich mich für die tolle Zusammenarbeit in jederlei Hinsicht. Ganz gleich ob Forschung, Lehre oder Lange Nacht der Wissenschaften, jede Aufgabe ließ sich mit Ihnen auch in stürmischen Zeiten mit viel Freude bewältigen. Die gemeinsamen Kaffeerunden zu den wahren Fragen der Physik, den Sorgenkandidaten unserer Lehrveranstaltungen und den Problemen unserer Doktorarbeiten waren für mein Vorankommen und vor allem Wohlbefinden von größter Bedeutung.

Die Atmosphäre in der Arbeitsgruppe empfand ich stets als großartig. Dafür bedanke ich mich bei Claudia Handtke, Renate Brechel, Gabi Ernst, Christian Glagow, Linda Krüger, Nora Butter, Verena Weber, Susanne Jank, Peter Spanknebel, Wiebke Krambeck und allen „Unilabbern". So viel Hilfsbereitschaft und Offenheit gibt es wohl in keiner anderen Gruppe.

Besonders gern bin ich immer in der Sammlung gewesen. Zusammen mit Patrick Meinhold, Janin Greiner-Bär, Joachim Haupt, Stephan Schmidt, Thomas Quick, Robert Teichert und Götz Wogenstein ließen sich dort sowohl ausgefeilte Experimente als auch wilde Projekte realisieren. Vielen Dank für die Hilfe bei den so oft kurzfristigen Bitten.

Den „alten“ Doktoranden, Burkhard Priemer, Pascal Guderian, Maria Ploog und Tanja Tajmel, danke ich für die gute Zeit während meines Startes in der Didaktik und die unvergessenen Konferenzaufenthalte. Ebenso danke ich der piko-Lehrergruppe, mit deren Mechanikprojekt für mich alles begann. Auf die Nudelbrücken werde ich auf Konferenzen noch immer angesprochen.

Für die Begutachtung meiner Arbeit bedanke ich mich bei Rita Wodzinski und Helmut Fischler. Den Lehrerinnen und Lehrern des John-Lennon-, Hannah-Arendt-, Gottfried-Keller- und Albrecht-Dürer-Gymnasiums danke ich für ihr Vertrauen in mein Projekt, für das sie mir ihre knappe Unterrichtszeit zur Verfügung stellten.

Außerhalb von Universität und Schule gilt mein Dank sowohl meiner Familie, die mir unermüdlich die Daumen drückte, als auch meinen Freunden und Nachbarn, die, teils mit ihren eigenen Doktorarbeiten kämpfend, für Verständnis, teils für den notwendigen Gegenpol sorgten. Ganz besonders danke ich meiner Freundin und Partnerin Katherina Flaig. Zusammen kämpften wir uns mit unseren Arbeiten durch die Stromschnellen von Forschung und Wissenschaft. Sie ließ sich mit mir auf so manche haarige Diskussion zu Empirie und Statistik ein, wenn sich meine Gedanken trotz Feierabends um meine Studie drehten. Ohne sie hätte ich nicht dorthin gelagen können, wo ich jetzt bin.

Literaturverzeichnis

Aguirre, Jose und Erickson, Gaalen: Students' Conceptions about the Vector Characteristics of Three Physics Concepts. In: *Journal of Research in Science Teaching*, Band 21(5): S. 439–457, 1984.

Aguirre, Jose M.: Student Preconceptions about Vector Kinematics. In: *The Physics Teacher*, Band 26(4): S. 212–216, 1988.

Anderson, John R. (Hg.): *Kognitive Psychologie.* Spektrum Akademischer Verlag, zweite Auflage, 1996.

Bader, Franz (Hg.): *Dorn Bader - Physik - Gymnasium Sek II - 12/13.* Schroedel Verlag im Bildungshaus Schroedel Diesterweg, 2006.

Bader, Franz und Dorn, Friedrich (Hg.): *Dorn Bader - Physik - Ausgabe A - Gymnasium Sek II, 11.* Bildungshaus Schulbuchverlage Westermann Schroedel Diesterweg, 1998.

Bader, Franz und Oberholz, Heinz-Werner (Hg.): *Dorn Bader - Physik - Gymnasium Berlin 7/8.* Bildungshaus Schulbuchverlage Westermann Schroedel Diesterweg, 2006.

Baumert, Jürgen; Lehmann, Rainer; Lehrke, Manfred; Clausen, Marten; Hosenfeld, Ingmar; Neubrand, Johanna; Patjens, Sigrid; Jungclaus, Heiko und Günther, Wolfram (Hg.): *Testaufgaben Naturwissenschaften TIMSS 7./8. Klasse (Population 2)*, Band 61 von *Materialien aus der Bildungsforschung.* Max-Planck-Inst. für Bildungsforschung, 1998.

Bender, Peter: Probleme mathematischer Begriffsbildung diskutiert am Beispiel der Vektor-Addition. In: *mathematica didactica*, Band 17(1): S. 3–27, 1994.

Beutelspacher, Albrecht: *Lineare Algebra: eine Einführung in die Wissenschaft der Vektoren, Abbildungen und Matrizen.* Vieweg, 6. Auflage, 2003.

Boczianowski, F. und Schön, L.-H.: Einführung in die Mechanik über die Statik - Zeiger als kumulatives Element. In: Nordmeier, V. und Oberländer, A. (Hg.) *Didaktik der Physik - Kassel 2006*. Deutsche Physikalische Gesellschaft, Lehmanns Media, 2006a.

Boczianowski, F. und Schön, L.-H.: Mit der Statik in die Mechanik - Vektoren als kumulatives Element. In: Höttecke, Dietmar (Hg.) *Naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich*. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, LIT Verlag, 2007, Band 27, S. 304–306. Jahrestagung in Bern, 2006.

Boczianowski, F. und Schön, L.-H.: Konzeptuelles Verständnis von Vektoren in der Mittelstufe - Eine Studie. In: Höttecke, Dietmar (Hg.) *Kompetenzen, Kompetenzmodelle, Kompetenzentwicklung*. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, LIT Verlag, Berlin, 2008, S. 338–340. Jahrestagung in Essen, 2007.

Boczianowski, Franz: Vom Tragen zum Tragwerk - Eine Einführung des Kraftbegriffs durch körperliche Erfahrung. In: *Naturwissenschaften im Unterricht Physik*, Band 98(2): S. 9–17, 2007.

Boczianowski, Franz: Konzeptuelles Verständnis von Vektoren in der Mittelstufe - Eine Studie, 2009. Jahrestagung in Gmünd, 2008.

Boczianowski, Franz und Schön, Lutz-Helmut: Brücken bauen - Einführung in die Mechanik über die Statik. In: Pitton, Anja (Hg.) *Lehren und Lernen mit neuen Medien*. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, LIT Verlag, 2006b, Band 26, S. 180–182. Jahrestagung in Paderborn, 2005.

Boczianowski, Franz und Schön, Lutz-Helmut: Einführung in die Mechanik über die Statik - Arbeitsergebnisse aus dem piko-Schulset Berlin. In: Pitton, Anja (Hg.) *Lehren und Lernen mit neuen Medien*. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, LIT Verlag, 2006c, Band 26, S. 332. Jahrestagung in Paderborn, 2005.

Bolter, Steve: How I teach vectors. In: *Physics Education*, Band 33(6): S. 359–365, 1998.

Bortz, Jürgen: *Statistik für Sozialwissenschaftler - 5. Auflage*. Springer, 1999.

Bortz, Jürgen und Döring, Nicola: *Forschungmethoden und Evaluation für Sozialwissenschaftler für Human- und Sozialwissenschaftler, 3. Auflage*. Springer, 2002.

Bredthauer, W.; Bruns, K.G.; Müller, W.; Klar, G.; Schmidt, M.; Wessels, P.; Schlobinski-Voigt, U.; Grote, M.; Niemann, K.; Reimers, J.; Theis, W. und Wojke, P. (Hg.): *ImpulsePhysik - Mittelstufe - für Gymnasien*. Ernst Klett Verlag, 2002.

Brell, Claus; Schecker, Horst; Theyßen, Heike und Schumacher, Dieter: Computer trifft Realexperiment - besser lernen mit neuen Medien. In: Nordmeier, V. und Oberländer, A. (Hg.) *Didaktik der Physik - Kassel 2006*. Deutsche Physikalische Gesellschaft, Lehmanns Media, 2006.

Bürger, Heinrich; Fischer, Roland; Malle, Günther und Reichel, Hans-Christian: Zur Einführung des Vektorbegriffes: Arithmetische Vektoren mit geometrischer Deutung. In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, Band 1/2: S. 171–187, 1980.

Diehl, Bardo; Erb, Roger; Heise, Harri; Kotthaus, Udo; Lindner, Klaus; Schlichting, Hans-Joachim; Schmalhofer, Claus; Schön, Lutz-Helmut; Schröder, Klaus G.; Schulze, Helmke; Schulze, Peter M.; Tews, Wolfgang; Tillmanns, Peter C. und Winter, Rolf: *Physik - Oberstufe - Gesamtband*. Cornelsen Verlag, 2008.

Erb, Roger: *Optik mit Lichtwegen - Das Fermat-Prinzip als Grundlage für das Verstehen der Optik*. Westarp-Wissenschaften, 1994.

Erb, Roger: Optik in der Oberstufe. In: *Physik in der Schule*, Band 33(2): S. 281–284, 1995.

Felbrich, Anja: *Kontrastierungen als effektive Lerngelegenheiten zur Vermittlung von Wissen über Repräsentationsformen am Beispiel des Graphen einer linearen Funktion*. Dissertation, Technische Universität Berlin, 2005.

Feynman, Richard P.: *QED - The Strange Theory of Light and Matter*. Princeton University Press, 1985.

Feynman, Richard P.: *QED - Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie, 11. Auflage*. Piper, 2005.

Field, Andy: *Discovering Statistics Using SPSS - Second Edition*. Sage Publications, 2005.

Fischer, Astrid: Mentale Modelle zum Vektorraumbegriff - Erste Ergebnisse einer empirischen Untersuchung unter Studierenden. In: *mathematica didactica*, Band 26(2): S. 91–114, 2003.

Genin, Ch.; Michaud-Bonnet, J. und Pellet, A.: Représentation des élèves en mathématiques et en physique sur les vecteurs et les grandeurs vectorielles lors de la transition collège-lycée. In: *Petit x - Revue de didactique des mathématiques et d'analyses de pratiques pour l'enseignement secondaire*, Band 14/15: S. 39–63, 1987.

Giancoli, Douglas C.: *Physik*. Pearson Education, dritte Auflage, 2006.

Grehn, Joachim und Krause, Joachim (Hg.): *Metzler Physik*. Schroedel Verlag, dritte Auflage, 1998.

Gromadecki, Ulrike; Mikelskis-Seifert, Silke und Duit, Reinders: Naturwissenschaftliches Argumentieren im Anfangsunterricht Physik. In: Höttecke, D. (Hg.) *Naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich*. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, LIT Verlag, 2007, S. 166–168. Jahrestagung in Bern, 2006.

Grosche, G.; Ziegler, V. und Ziegler, D. (Hg.): *Bronstein-Semendjajew*. Verlag Harri Deutsch, 1989.

Hardy, Ilonca; Schneider, Michael; Jonen, Angela; Stern, Elsbeth und Möller, Kornelia: Fostering Diagrammatic Reasoning in Science Education. In: *Swiss Journal of Psychology*, Band 64(3): S. 207–217, 2005.

Heller, K. A. und Perleth, Ch.: *KFT 4-12+ R, Kognitiver Fähigkeitstest für 4. bis 12. Klassen, 3. rev. Auflage*. Hogrefe Verlag für Psychologie, 2000.

Helmke, Andreas und Schrader, Friedrich-Wilhelm: Determianten der Schulleistung. In: Rost, Detlef (Hg.) *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie*, Beltz, PVU, S. 60–61. 1998.

Herrmann, F.: *Der Karlsruher Physik - Ein Lehrbuch für den Unterricht der Sekundarstufe I*. Dissertation, Didaktik der Physik, Universität Karlsruhe, 1995.

Herrmann, Friedrich: Was ist ein Bezugssystem? In: Nordmeier, V; Oberländer, A und Grötzebauch, H. (Hg.) *Didaktik der Physik - Regensburg 2007*. Deutsche Physikalische Gesellschaft, Lehmanns Media, 2007.

Hopf, M.; Waltner, C.; Wilhelm, T. und Wiesner, H.: Konzeption einer Vergleichsstudie zur Mechanik in Jahrgangsstufe 7, 2009. Jahrestagung in Schwäbisch Gmünd, 2008.

Jonassen, D.H. und Carr, C.S.: Mindtools: affording multiple knowledge representations for learning. In: Lajoie, S.P. (Hg.) *Computers as cognitive tools: No more walls*. Lawrence Erlbaum, 2000, Band 2, S. 165–196.

Jung, Walter; Reul, Horst und Schwedes, Hannelore: *Untersuchungen zur Einführung in die Mechanik in den Klasse 3-6*. Beiträge zur Methodik und Didaktik der Physik. Diesterweg, 1977.

Kanim, Stephen E.; Flores, Sergio und Kautz, Christian H.: Student use of vectors in introductory mechanics. In: *American Journal of Physics*, Band 72(4): S. 460–468, 2004.

Kerres, Michael: *Multimediale und telemediale Lernumgebungen, Konzeption und Entwicklungen*. R. Oldenbourg Verlag, 1998.

Kondratyev, Alexander S. und Sperry, Willard: Direct use of vectors in mechanics problems. In: *The Physics Teacher*, Band 32: S. 416–418, 1994.

Kuhn, W. (Hg.): *Kuhn Physik 1*. Westermann, 1996.

Lergenmüller, Arno und Schmidt, Günter (Hg.): *Mathematik Neue Wege 7 - Arbeitsbuch für Gymnasien*. Bildungshaus Schulbuchverlage Westermann Schroedel Diesterweg, 2006.

Mähler, Claudia und Stern, Elsbeth: Transfer. In: Rost, D. H. (Hg.) *Handwörterbuch: Pädagogische Psychologie, 3. überarbeitete und erweiterte Auflage*. Beltz Verlag, 2006, S. 782–793.

Mevarech, Zemira und Stern, Elsbeth: Interaction between Knowledge and Contexts on Understanding Abstract Mathematical Concepts. In: *Journal of Experimental Child Psychology*, Band 65: S. 68–95, 1997.

Meyer, Lothar und Schmidt, Gerd-Dietrich (Hg.): *Physik 7/8 Berlin G*. Duden Paetec, 2006.

Michael, Thomas (Hg.): *Diercke Weltatlas, 5. Auflage*. Bildungshaus Schulbuchverlage Westermann Schroedel Diesterweg, 2002.

Mikelskis, Helmut F.; Schön, Lutz-Helmut und Wilke, Hans-Joachim (Hg.): *Physik plus - Klasse 7/8 Berlin - Mit fächerübergreifenden Themen und Projektangeboten*. Cornelsen Verlag, 2006.

Neubauer, Aljoscha und Stern, Elsbeth: *Lernen macht intelligent - Warum Begabung gefördert werden muss*. Deutsche Verlagsanstalt, 2007.

Neubrand, Michael; Klieme, Eckhard; Lüdtke, Oliver und Neubrand, Johanna: Kompetenzstufen und Schwierigkeitsmodelle für den PISA-Test zur mathematischen Grundbildung. In: *Unterrichtswissenschaft*, Band 30(2): S. 100–119, 2002.

Newburgh, Ronald und Strasburger, David: Rounding a banked curve. In: *Physics Education*, Band 37(3): S. 254–256, 2002.

Nguyen, Ngoc-Loan und Meltzer, David E.: Initial understanding of vector concepts among students in introductory physics courses. In: *American Journal of Physics*, Band 71(6): S. 630–638, 2003.

Niedrig, H.: *Physik*. Springer, 1992.

Prenzel, Manfred; Baumert, Jürgen; Blum, Werner; Lehmann, Rainer; Leutner, Detlev; Neubrand, Michael; Pekrun, Reinhard; Rolff, Hans-Günter; Rost, Jürgen und Schiefele, Ulrich (Hg.): *PISA 2003 – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs*. PISA-Konsortium Deutschland, Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften, Kiel, 2004.

Reif, Frederick: Interpretation of Scientific or Mathematical Concepts: Cognitive Issues and Instructional Implications. In: *Cognitive Science*, Band 11: S. 394–416, 1987.

Reif, Frederick und Allen, Sue: Cognition for Interpreting Scientific Concepts: A Study of Acceleration. In: *Cognition and Instruction*, Band 9(1): S. 1–44, 1992.

Reusch, Wolfgang und Heuer, Dieter: Zweidimensionale Bewegungen - Unterrichtseinsatz mit Schülerversuchen. In: Behrendt, H. (Hg.) *Zur Didaktik der Physik und Chemie, Probleme und Perspektiven*. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, Leuchtturm-Verlag, 1998, S. 233–235. Jahrestagung in Essen, 1997.

Reusch, Wolfgang und Heuer, Dieter: Förderung des Physiklernens durch Visualisierung und Interaktivität im Bereich der 2-dimensionalen Kinematik/Dynamik. In: R., Brechel (Hg.) *Zur Didaktik der Physik und Chemie - Probleme und Perspektiven*. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, Leuchtturm-Verlag, 1999, S. 182–184. Jahrestagung in Essen, 1998.

Roche, John: Introducing vectors. In: *Physics Education*, Band 32: S. 339–345, 1997.

Rost, Detlef H.: *Interpretation und Bewertung pädagogosch-psychologischer Studien*. Beltz Verlag, 2005.

Savelsbergh, Elwin: On learning to construct formal graphical representations as qualitative problem-solving tools: The case of vectors in mechanics. In: *European Association for Research on Learning and Instruction, 8th EARLI Conference Gothenburg, Sweden*. 1999.

Schmidt, M.; Wilhelm, T. und Heuer, D.: Die Maus als Bewegungssensor. Kinematik und Dynamik in der Sekundarstufe I mihilfe des Computers. In: *Naturwissenschaften im Unterricht*, Band 69: S. 31 – 33, 2002.

Schneider, Michael: *Konzeptuelles und prozedurales Wissen als latente Variablen: Ihre Interaktion beim Lernen mit Dezimalbrüchen*. Dissertation, Technische Universität Berlin, 2005.

Schranner, Ludwig: Problemorientierte Einführung der Dreieckskonstruktion und Berechnung SSW. In: *Didaktik der Mathematik*, Band 11: S. 2–14, 1983.

Schüller, Florian und Wilhelm, Thomas: Mechanik in Jahrgangsstufe 7 - zweidimensional und multimedial. In: Nordmeier, V. und Grötzebauch, H. (Hg.) *Didaktik der Physik - Berlin 2008*. Deutsche Physikalische Gesellschaft, Lehmanns Media, 2008.

Senatsverwaltung, 2006: *Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I - Jahrgangsstufe 7-10 - Hauptschule Realschule Gesamtschule Gymnasium - Physik*, 2006.

Shaffer, Peter S. und McDermott, Lillian C.: A research-based approach to improving student understanding of the vector nature of kinematical concepts. In: *American Journal of Physics*, Band 73(10): S. 921–931, 2005.

Slančík, K.; Starauschek, E. und Mikelskis, H.: Unterstützen Animationen und die Anfertigung von Notizen den Wissenserwerb in der Optik? In: Nordmeier, V. und Oberländer, A. (Hg.) *Didaktik der Physik - Kassel 2006*. Deutsche Physikalische Gesellschaft, Lehmanns Media, 2006.

Stern, E.: Lernen ist der mächtigste Mechanismus der kognitiven Entwicklung: Der Erwerb mathematischer Kompetenzen. In: Schneider, W. und Knopf, M. (Hg.) *Entwicklung, Lehren und Lernen: Zum Gedenken an Franz Emanuel Weinert*, Hogrefe Verlag für Psychologie, S. 207–217. 2003.

Stern, Elsbeth: Mathematik. In: Weinert, F. E. (Hg.) *Psychologie des Unterrichts und der Schule*, Hogrefe Verlag für Psychologie, S. 398–426. 1997.

Stern, Elsbeth: Intelligenz, Wissen, Transfer und der Umgang mit Zeichensystemen. In: Stern, Elsbeth und Guthke, Jürgen (Hg.) *Perspektiven der Intelligenzforschung*, Papst Publisher, S. 163–204. 2001.

Stern, Elsbeth; Aprea, Carmela und Ebner, Hermann G.: Improving cross-content transfer in text processing by means of active graphical representation. In: *Learning and Instruction*, Band 13: S. 191–203, 2003.

Stern, Elsbeth und Hardy, Ilonca: Schulleistungen im Bereich der mathematischen Bildung. In: Weinert, Franz E. (Hg.) *Leistungsmessungen in Schulen*, Beltz Verlag, Kapitel 11, S. 153–168. Zweite Auflage, 2002.

Stern, Elsbeth; Hardy, Ilonca; Felbrich, Anja; Schneider, Michael und Saalbach, Henrik: ENTERPRISE: Cognitive Activation in Elementary School Children: The Potential of Diagrammatic Tools. In: *Annual Report 2004, Center for Educational Research*, Max Planck Institute für Bildungsforschung. 2004.

Theilmann, Florian: *Expedition in die Mechanik - Themen und Motive für erscheinungsorientierten Physikunterricht.* edition waldorf, Pädagogische Forschungsstelle beim Bund der Freien Walddorfschulen e. V., 2006.

Tietze, Uwe-Peter; Klika, Manfred und Wolpers, Hans (Hg.): *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II - Didaktik der Analytischen Geometrie und der Linearen Algebra*, Band 2. Vieweg, 2000.

Tobias, Verena; Hopf, Martin; Waltner, Christine; Wilhelm, Thomas und Wiesner, Hartmut: Der Einfluss der Sachstruktur im Mechanikunterricht - Qualitatives Forschungsvorhaben im Rahmen einer integrativen Studie. In: Nordmeier, V. und Grötzebauch, H. (Hg.) *Didaktik der Physik - Bochum 2009.* Deutsche Physikalische Gesellschaft, Lehmanns Media, 2009.

Vogel, H. (Hg.): *Gerthsen Physik, 18. Auflage.* Springer, 1995.

Vogt, Thomas: Unterrichtserfahrungen am Beispiel des Skalarprodukts in einem Grundkurs Mathematik. In: *MU Der Mathematikunterricht*, Band 2/3: S. 86–92, 2005.

Weigand, Hans-Georg und Weth, Thomas: Werkzeuge des Geistes im Dienste der Mathematik: Taschenrechner und Computeralgebra Systeme. In:

Bücher, A.; Humenberger, H.; Hußmann, S. und Prediger, S. (Hg.) *Realitätsnaher Mathematikunterricht - vom Fach aus und für die Praxis - Festschrift für Hans-Wolfgang Henn zum 60. Geburtstag*. Verlag Franzbecker, 2006, S. 191–202.

Weinert, Franz: Psychologie des Lernens und der Instruktion. In: Weinert, Franz (Hg.) *Enzyklopädie der Psychologie - Themenbereich D Praxisgebiete*, Hogrefe Verlag für Psychologie, Band 2 - Psychologie des Lernens und der Instruktion von *Serie I - Pädagogische Psychologie*, S. 18–24. 1996.

Werner, Johannes: *Vom Licht zum Atom - Ein Unterrichtskonzept zur Quantenphysik unter Nutzung des Zeigermodells*. Logos Verlag, 2000.

Wheeler, David: Vectors: swallow them whole! In: *Physics Education*, Band 33: S. 10–12, 1998.

Wheeler, David: Calculations with whole vectors: a really easy alternative to components. In: *Physics Education*, Band 36: S. 406–409, 2001.

Wheeler, David und Charoenkul, Niran: Not a componet in sight. In: *Physics Education*, Band 37: S. 423–425, 2002.

White, Barbara Y.: ThinkerTools: Causal Models, Conceptual Change, and Science Education. In: *Cognition and Instruction*, Band 10: S. 1–100, 1993.

Wild, Elke; Hofer, Manfred und Pekrun, Reinhard: Psychologie des Lerners. In: Krapp, Andreas und Weidenmann, Bernd (Hg.) *Pädagogische Psychologie*, Beltz Verlag, S. 238–254. 2006.

Wilhelm, T. und Heuer, D.: Lernen von Konzepten zur Dynamik - dynamische Physikrepräsentation am Computer zur Visualisierung. In: Behrendt, H. (Hg.) *Zur Didaktik der Physik und Chemie, Probleme und Perspektiven*. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, Leuchtturm-Verlag, 1995, S. 163 – 165. Jahrestagung in Freiburg i. Br., 1994.

Wilhelm, T. und Heuer, D.: Fehlvorstellungen in der Kinematik vermeiden - durch Beginn mit der zweidimensionalen Bewegung. In: *Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule*, Band 51(7): S. 29–34, 2002a.

Wilhelm, T. und Heuer, D.: Interesse fördern, Fehlvorstellungen abbauen - dynamisch ikonische Repräsentationen in der Dynamik. In: *Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule*, Band 51(8): S. 2–11, 2002b.

Wilhelm, T; Waltner, C.; Hopf, M.; Tobias, V. und Wiesner, H.: Der Einfluss der Sachstruktur im Mechanikunterricht - quantitative Ergebnisse zur Verständnis- und Interessenentwicklung. In: Nordmeier, V. und Grötzebauch, H. (Hg.) *Didaktik der Physik - Bochum 2009*. Deutsche Physikalische Gesellschaft, Lehmanns Media, 2009.

Wilhelm, Thomas: *Konzeption und Evaluation eines Kinematik/Dynamik-Lehrgangs zur Veränderung von Schülervorstellungen mithilfe dynamisch ikonischer Repräsentationen und graphischer Modellbildung*. Logos Verlag, 2005.

Wilhelm, Thomas: Vektorverständnis und vektorielles Kinematikverständnis von Studienanfängern. In: Nordmeier, V.; Oberländer, A. und Grötzebauch, H. (Hg.) *Didaktik der Physik - Regensburg 2007*. Deutsche Physikalische Gesellschaft, Lehmanns Media, 2007.

Wilhelm, Thomas: Mechanik - zweidimensional und multicodal. In: Nordmeier, H., V.; Grötzebauch (Hg.) *Didaktik der Physik - Berlin 2008*. Deutsche Physikalische Gesellschaft, Lehmanns Media, 2008.

Wilhelm, Thomas und Heuer, Dieter: Förderung von Verständnis in der Mechanik durch den Einsatz neuer Darstellungen physikalischen Wissens am Computer. In: Nordmeier, Volkhard (Hg.) *Didaktik der Physik - Leipzig2002*. Deutsche Physikalische Gesellschaft, Lehmanns Media, 2002c.

Willer, J.: *Didaktik des Physikunterrichts*. Verlag Harri Deutsch, 2003.

Wittmann, Gerald: Eine Unterrichtssequenz zum Vektorbegriff in der Sekundarstufe I. In: *mathematica didactica*, Band 19(1): S. 93–116, 1996.

Wittmann, Gerald: Allgemeine didaktische Fragen zur Analystischen Geometrie und Linearen Algebra. In: Tietze, Uwe-Peter; Klika, Manfred und Wolpers, Hans (Hg.) *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II - Didaktik der Analytischen Geometrie und der Linearen Algebra*, Vieweg, Kapitel 2.3, S. 132–148. 2000.

Wittmann, Gerald: *Schülerkonzepte zur Analytischen Geometrie - Mathematikhistorische, epistemologische und empirische Untersuchungen*, Band 22 von *Texte zur mathematischen Forschung und Lehre*. Verlag Franzbecker, 2003.

Wodzinski, Rita: *Untersuchungen von Lernprozessen beim Lernen Newtonscher Dynamik im Anfangsunterricht*, Band 25 von *Naturwissenschaft und Technik - Didaktik im Gespräch*. LIT Verlag, 1996.

Wodzinski, Rita und Wiesner, Hartmut: Einführung in die Mechanik über die Dynamik I. In: *Physik in der Schule*, Band 32(5): S. 164–169, 1994a.

Wodzinski, Rita und Wiesner, Hartmut: Einführung in die Mechanik über die Dynamik II. In: *Physik in der Schule*, Band 32(5): S. 202–207, 1994b.

Wodzinski, Rita und Wiesner, Hartmut: Einführung in die Mechanik über die Dynamik III. In: *Physik in der Schule*, Band 32(5): S. 331–335, 1994c.

Wüst, Rainer: *Mathematik für Physiker und Mathematiker*. Walter de Gruyter, 1995.

Abbildungsverzeichnis

3.1 Pfeile im Alltag 17
3.2 Betragspfeile in der Geographie 17
3.3 Betragspfeile in der Physik 18
3.4 Verschiebungspfeile 19
3.5 Zeichnerische Addition von Vektorpfeilen durch Polygonzug . . 20
3.6 Ortspfeile 21
3.7 Zeichnerische Subtraktion von Pfeilen, 1. Variante 22
3.8 Geschwindigkeitspfeile am Pendel 22
3.9 Boot-Fluss-Situtation 23
3.10 Parallelogrammkonstruktion 24
3.11 Kraftresultierende im Kraftplan 25
3.12 Kraftplan einer Brücke 25
3.13 Zeichnerische Subtraktion von Pfeilen, 2. Variante 26
3.14 Multiplikation von Pfeilen 27
3.15 Phasenzeiger in der Wechselstromlehre 29

6.1 Untersuchungsdesign 68
6.2 1. Kontrast für alle Skalen 71
6.3 2. Kontrast für die Skalen Abstrakt, Geschwindigkeit & Weitere 72
6.4 2. Kontrast für die Skala Kraft 73
6.5 3. Kontrast für die Skalen Abstrakt, Geschwindigkeit & Weitere 74
6.6 3. Kontrast für die Skala Kraft 74

7.1 Übersicht über Treatments 78
7.2 Modelleisenbahn mit integriertem Tachometer 79
7.3 Geschwindigkeitslineal 79
7.4 Übungsaufgabe „Das Wettrennen“ 81
7.5 Experimentierwagen mit Stift 82
7.6 Experimentierwagen auf Plattform 82
7.7 Summation von Kräften im Experiment 84
7.8 Bearbeitete Übungsaufgabe mit Kraftpfeilen 84

8.1 Item der Skala Abstrakt 90
8.2 Item der Skala Geschwindigkeit 90
8.3 Item der Skala Kraft 91
8.4 Item der Skala Weitere 91

10.1 Punktwerteverteilungen der Vortestergebnisse 100
10.2 Punktwerteverteilungen für Skala „Kognitive Fähigkeiten“ . . 101
10.3 Punktwerteverteilungen für Skala „Physik und Pfeile“ 101
10.4 Punktwerteverteilungen für Skala Abstrakt 102
10.5 Punktwerteverteilungen für Skala Geschwindigkeit 102
10.6 Punktwerteverteilungen für Skala Kraft 103
10.7 Punktwerteverteilungen für Skala Weitere 103
10.8 Histogramm zur Punktwerteverteilung der Gruppe T0 104
10.9 Ergebnisse für den 1. Kontrast 107
10.10 Ergebnisse für den 2. Kontrast 109
10.11 Ergebnisse für den 3. Kontrast 110

11.1 Punktwerteverteilungen der Teilgruppen für Skala Abstrakt . . 120
11.2 Punktwerteverteilungen der Teilgruppen für Skala Geschwindigkeit 120
11.3 Punktwerteverteilungen der Teilgruppen für Skala Kraft . . . 121
11.4 Punktwerteverteilungen der Teilgruppen für Skala Weitere . . 121
11.5 Ergebnisse für den 1. Kontrast mit geteilten Gruppen 124
11.6 Ergebnisse für den 2. Kontrast mit geteilten Gruppen 125
11.7 Ergebnisse für den 3. Kontrast mit geteilten Gruppen 126

C.1 Fragebogen zur Subskala „Pfeile und Physik“ 149
C.2 Fragebogen zur Subskala „Pfeile und Physik“ 150
C.3 Fragebogen zur Subskala „Pfeile und Physik“ 151
C.4 Fragebogen zur Subskala „Pfeile und Physik“ 152
C.5 Fragebogen zur Subskala „Pfeile und Physik“ 153
C.6 Fragebogen zur Subskala „Pfeile und Physik“ 154
C.7 Fragebogen zur Subskala „Pfeile und Physik“ 155
C.8 Nachtest-Fragebogen 160
C.9 Nachtest-Fragebogen 161
C.10 Nachtest-Fragebogen 162
C.11 Nachtest-Fragebogen 163
C.12 Nachtest-Fragebogen 164
C.13 Nachtest-Fragebogen 165
C.14 Nachtest-Fragebogen 166
C.15 Nachtest-Fragebogen 167

C.16 Nachtest-Fragebogen 168
C.17 Nachtest-Fragebogen 169
C.18 Nachtest-Fragebogen 170
C.19 Nachtest-Fragebogen 171
C.20 Nachtest-Fragebogen 172
C.21 Nachtest-Fragebogen 173
C.22 Nachtest-Fragebogen 174
C.23 Nachtest-Fragebogen 175
C.24 Nachtest-Fragebogen 176

D.1 Histogramm mit Normalfit für Skala Abstrakt 190
D.2 Histogramm mit Normalfit für Skala Geschwindigkeit 191
D.3 Histogramm mit Normalfit für Skala Kraft 192
D.4 Histogramm mit Normalfit für Skala Weitere 193

Tabellenverzeichnis

9.1 Verteilung der Schulklassen auf die Gruppen 94
9.2 Vorangegangener Schulunterricht 95

11.1 Teilgruppengröße nach Teilung der Gruppen 118

A.1 Kodierung der Kontraste 141

B.1 Ablauf der ersten beiden Unterrichtsstunden 144
B.2 Ablauf der letzten beiden Unterrichtsstunden 145

C.1 Einordnung der Items des Vortests 148
C.2 Einordnung der Items der Skala Abstrakt 156
C.3 Einordnung der Items der Skala Geschwindigkeit 157
C.4 Einordnung der Items der Skala Kraft 158
C.5 Einordnung der Items der Skala Weitere 159

D.1 Punktwerteverteilungen im Vortest 178
D.2 Test auf Normalverteilungen im Vortest 179
D.3 Test auf Normalverteilungen für Subskala KFT 180
D.4 Test auf Normalverteilungen für Subskala „Pfeile und Physik“ 181
D.5 Mittelwerte Vortest 182
D.6 Test auf Varianzhomogenität im Vortest 183
D.7 Varianzanalyse des Vortests 183
D.8 Punktwerteverteilungen im Nachtest 185
D.9 Test auf Normalverteilung für Skala Abstrakt 186
D.10 Test auf Normalverteilung für Skala Geschwindigkeit 187
D.11 Test auf Normalverteilung für Skala Kraft 188
D.12 Test auf Normalverteilung für Skala Weitere 189
D.13 Mittelwerte im Nachtest 194
D.14 Test auf Varianzhomogenität im Nachtest 195
D.15 Varianzanalyse im Nachtest 195
D.16 Robuster Mittelwertvergleiche für Skala Abstrakt 196

D.17 Übersichtstabelle Varianzanalyse und Kontraste des Nachtests 197
D.18 Details der Kontraste des Nachtests 198
D.19 Mittelwerte der Teilgruppen im Vortest 199
D.20 Homogenität der Varianzen der Teilgruppen 199
D.21 Varianzanalyse der Teilgruppen 200
D.22 Punktwerteverteilungen der Lernschwachen im Nachtest 202
D.23 Punktwerteverteilungen der Lernstarken im Nachtest 203
D.24 Test auf Normalverteilung der Teilgruppen 204
D.25 Test auf Normalverteilung der Teilgruppen 205
D.26 Test auf Normalverteilung der Teilgruppen 206
D.27 Test auf Normalverteilung der Teilgruppen 207
D.28 Test auf Normalverteilung der Teilgruppen 208
D.29 Test auf Normalverteilung der Teilgruppen 209
D.30 Test auf Normalverteilung der Teilgruppen 210
D.31 Test auf Normalverteilung der Teilgruppen 211
D.32 Übersichtstabelle Varianzanalyse und Kontraste der Exploration 213
D.33 Mittelwerte der lernschwachen Teilgruppen 214
D.34 Test der Varianzhomogenität der lernschwachen Teilgruppen . 215
D.35 Varianzanalyse der lernschwachen Teilgruppen 215
D.36 Mittelwertvergleiche der schwachen Teilgruppen 215
D.37 Geplante Kontraste für lernschwache Teilgruppen 216
D.38 Mittelwerte der lernstarken Teilgruppen 217
D.39 Prüfung der Varianzhomogenität der lernstarken Teilgruppen . 218
D.40 Varianzanalyse der lernstarken Teilgruppen 218
D.41 Geplante Kontraste für lernstarke Teilgruppen 219
D.42 Mittelwerte für Baseline-Teilgruppen 220
D.43 Paarvergleiche zwischen Baseline-Teilgruppen 221
D.44 Paarvergleiche für Teilgruppen bezüglich Skala Weitere 222

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Ich habe mich anderwärts nicht um einen Doktorgrad beworben und besitze einen entsprechenden Doktorgrad nicht.

Ich erkläre die Kenntnisnahme der dem Verfahren zugrunde liegenden Promotionsordnung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät I der Humboldt-Universität zu Berlin.

Berlin, den 4. November 2009

Franz Boczianowski